素数定理——从提出到证明

王钰开

2021 年 5 月 25 日

摘要

本论文是一篇关于解析数论中素数定理的读书报告。作者想沿着历史的踪迹，先介绍一些比较弱的定理，比如 Tchebychev 估计，再介绍两个不同的关于素数定理的证明。第一个是基于复分析的证明，它由 Hadamard 在 1896 年首次发表；第二个是基于"Selberg 不等式"的初等证明，它由 Selberg 在 1949 年首次发表。

关键词： Tchebychev 估计，解析方法，素数定理 ,Selberg 不等式

Abstract

This thesis is a reading report on the Prime Number Theorem in analytic number theory. The author plans to follow the trail of history by first introducing some weaker theorems, such as Tchebychev's estimation, and then discussing two different proofs of the Prime Number Theorem. The first proof is based on complex analysis, which was first published by Hadamard in 1896. The second one is an elementary proof based on "Selberg's inequality" , which was first published by Selberg in 1949.

Keywords: Tchebychev's estimation ,analytic method ,the Prime Number Theorem ,Selberg's inequality

目录

1 Tchebychev 的弱估计 **3**

1.1 问题的产生 3

1.2 数学分析的一些基本技巧及其在数论上的应用 3

1.3 Tchebychev 的弱估计 5

2 证明素数定理的解析方法 **8**

2.1 素数定理的证明概要 8

2.2 $\Gamma(s)$ 9

2.3 $\zeta(s)$ 11

2.4 素数定理的证明 14

3 证明素数定理的初等方法 **16**

3.1 若干简单结果 16

3.2 Selberg 不等式及其推论 17

3.3 初等证明 19

4 致谢 **21**

5 参考文献 **22**

1 Tchebychev 的弱估计

1.1 问题的产生

素数的分布看上去毫无规律，给定一个素数，很难说明下一个素数就在哪里出现。但如果粗糙一点，只看一个范围内大约有多少素数呢？1792 年，Gauss 在数字的演算中偶然发现素数的分布似乎符合:$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$。1798 年，Legendre 也做出了同样的猜测。从此，素数定理的证明竞赛便拉开了序幕。

1.2 数学分析的一些基本技巧及其在数论上的应用

定理 1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为复数列。令:

$$A(t) := \sum_{n \le t} a_n$$

那么对任意函数 $b \in \mathcal{C}^1([1,x])$，有: $\sum_{y<n\le x} a_n \cdot b(n) = A(X)b(x) - A(y)b(y) - \int_y^x A(t)b'(t)\mathrm{d}t$

证明. 参考 Riemman-Stieltjes 积分 □

推论 1. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续单调函数，其中 $a, b \in \mathbb{Z}$. 那么存在 *0* 到 *1* 之间的实数 ϑ，使得:

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \vartheta \cdot (f(b) - f(a))$$

推论 2. 取 $f(x)$ 为 $\ln x$，则有:

$$\ln n! = n \ln n - n + 1 + \vartheta \ln n$$

其中 $\vartheta = \vartheta_n \in [0,1]$

为了证明下一节的第二个定理，我们需要用上面所提到的技巧对 $\sum_{p\le x} \frac{1}{p}$ 进行估值。思路是通过 $\ln n!$ 的估值对 $\sum_{p\le x} \frac{\ln p}{p}$ 进行估计，再通过 $\sum_{p\le x} \frac{\ln p}{p}$ 的估值对 $\sum_{p\le x} \frac{1}{p}$ 进行估计。其中关键的技术就是定理 1 中的分部积分。下面的一系列定理都是以上面所说的为目的。

定理 2. 对 $n \ge 1$，有:

$$\prod_{p\le n} p \le 4^n$$

证明. 对 n 进行归纳，当 $n = 1, 2$ 时成立，所以不妨设 $n \ge 3$。若 n 为偶数，则其不是素数，故有:

$$\prod_{p\le n} p = \prod_{p\le n-1} p \le 4^{n-1} < 4^n$$

若 n 为奇数，设 $n = 2m+1$。基于二项式定理，我们有:

$$\left(\prod_{m+1\le p\le 2m+1} p \right) \mid \begin{bmatrix} 2m+1 \\ m \end{bmatrix} \le \frac{1}{2} \cdot 2^{2m+1} = 4^m$$

再由归纳假设:

$$\left. \begin{aligned} \prod_{p\le m+1} p \le 4^{m+1} \\ \prod_{m+1<p\le 2m+1} p \le 4^m \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \prod_{p\le n} \le 4^n$$

□

推论 3.

$$\sum_{p\le n}\ln p \le n\ln 4$$

定理 3. 对任意素数 p, 有:

$$v_p(n!) = \sum_{k\ge 1}\lfloor \frac{n}{p^k}\rfloor$$

证明. 见初等数论教材 □

推论 4. 对任意素数 p, 有;

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \le \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

证明. 显然 □

在下面的定理中，$\lfloor x \rfloor = n$

定理 4 (Mertens 第一定理). 对 $x \ge 2$, 我们有:

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1)$$

而且，上式 $O(1)$ 的取值在 $(-1-\ln 4, \ln 4)$

证明. 一方面, 由定理 3，有

$$\ln n! = \sum_{p\le n}\vartheta_p(n!)\ln p$$

再利用推论 4 与推论 3，我们得到

$$\ln n! < n\cdot\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p} + n\cdot\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p(p-1)} \quad (1)$$

以及

$$\ln n! > n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p} - \sum_{p\le n}\ln p \ge n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p} - n\ln 4 \quad (2)$$

另一方面，利用推论 2，我们得到:

$$\ln n! \ge n\ln n - n + 1 \quad (3)$$

和

$$\ln n! \le n\ln n - n + 1 + \ln n \quad (4)$$

将 (2) 与 (4) 结合，我们推出

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} < \ln x + \ln 4$$

将 (1) 与 (3) 结合，我们推出

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} > \ln x + \frac{1}{n} - 1 - \sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p(p-1)}$$

易证明，

$$\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p(p-1)} < \ln 4$$

从而

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} > \ln x - 1 - \ln 4$$

这样，定理的细节便全部证完。 □

推论 5. 存在常数 c_1，使得对 $x \geq 2$，有

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + c_1 + O(\frac{1}{\ln x})$$

证明. 由 Mertens 第一定理，有

$$R(t) := \sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p} - \ln t = O(1)$$

再利用定理 1，又有

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \int_{2-}^{x} \mathrm{d} \sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p} &= \int_{2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} + \int_{2-}^{x} \frac{\mathrm{d}R(t)}{\ln t} \\
&= \ln\ln x - \ln\ln 2 + \frac{R(x)}{\ln x} - \frac{R(2-)}{\ln 2} + \int_{2}^{x} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t \\
&= \ln\ln x - \ln\ln 2 + \frac{R(x)}{\ln x} - \int_{x}^{\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t - \frac{R(2-)}{\ln 2} + \int_{2}^{\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

取

$$c_1 = -\ln\ln 2 + 1 + \int_{2}^{\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t$$

由定理 4 知

$$|\frac{R(x)}{\ln x} - \int_{x}^{\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t| \leq \frac{2(1 + \ln 4)}{\ln x}$$

便得欲证公式。 □

1.3 Tchebychev 的弱估计

在本章中我们证明两个定理, 它们都由 Tchebychev 最先证明:

定理 5. 对 $n \geq 4$, 有 $\ln 2 \cdot \frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq 6 \cdot \frac{n}{\ln n}$

定理 6. $\liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq 1 \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$

可以看出，尽管没有证明素数定理，但 Tchebychev 已经迈出了重要的一步。他相当于证明了 $\pi(x) \in O(\frac{x}{\ln x})$, 并且，如果 $\pi(x) \sim cx/\ln x$, 那么 c 只能是 1.

定理 1 左侧不等式的证明. 该不等式的一个极为简便的方法是由 Nair(1982a, b) 给出。它基于一个显然的不等式

$$\pi(n) \geq \frac{\ln d_n}{\ln n}$$

其中 d_n 表示 1 到 n 的最小公倍数。从而为证明定理 1 的左端不等式，只需证明对新不等式：

$$d_n \geq 2^n \quad (n \geq 9)$$

Nair 的思路是考虑积分

$$I(m,n) = \int_{0}^{1} x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-m} \,\mathrm{d}x \quad 1 \leq m \leq n$$

类似于组合学中“用两种方法计数”的思想，我们用两种不同的方法计算上述积分。首先，我们用二项式定理将被积函数展开再积分，得到：

$$I(m,n) = \sum_{0 \leq j \leq n-m} (-1)^j \cdot \begin{bmatrix} n-m \\ j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m+j}$$

通过上式不难看出，$I(m,n) \in \frac{1}{d_n}\cdot\mathbb{Z}$ 另一方面，我们可以按如下方法操作：

$$\sum_{1\le m\le n}\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}\cdot I(m,n)\cdot y^{m-1}=\int_0^1(1-x+x\cdot y)^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\cdot\sum_{1\le m\le n}y^{m-1}$$

从而比较系数，我们得到：

$$I(m,n)=\frac{1}{n}\cdot\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}\quad(1\le m\le n)$$

结合之前的结论“$I(m,n)\in\frac{1}{d_n}\cdot\mathbb{Z}$”，我们得到：

$$n\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\mid d_{2n}\mid d_{2n+1}$$

$$(n+1)\cdot\begin{bmatrix}2n+1\\n\end{bmatrix}=(2n+1)\cdot\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\mid d_{2n+1}$$

因为 n 与 $2n+1$ 互素，进一步得：

$$n\cdot(2n+1)\cdot\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\mid d_{2n+1}$$

又因为 $\left[\begin{smallmatrix}2n\\n\end{smallmatrix}\right]$ 是 $2n+1$ 个二项式系数最大的一项，从而

$$\begin{aligned}d_{2n+1}&\ge n\cdot 4^n\quad(n\le 1)\\ \Rightarrow d_{2n+1}&\ge 2\cdot 4^n=2^{2n+1}\quad(n\le 2)\\ \Rightarrow d_{2n+2}\ge d_{2n+1}&\ge 4\cdot 4^n=2^{2n+2}\quad(n\le 4)\end{aligned}$$

从而当 $n\ge 9$ 时，上述不等式成立。 □

定理 1 右侧不等式的证明. 我们从不等式

$$2^n\le\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\le 4^n$$

入手，对上述不等式取对数，得到：

$$n\ln 2\le\ln 2n!-2\ln n!\le n\cdot ln4$$

类似于组合学中对同一个集合采取不同的计数方式，我们将 $\ln 2n!-2\ln n!$ 改写为：

$$\sum_{p\le 2n}\sum_{m=1}^{\lfloor\frac{\ln 2n}{\ln p}\rfloor}\left(\lfloor\frac{2n}{p^m}\rfloor-2\lfloor\frac{n}{p^m}\rfloor\right)\cdot\ln p$$

因为 $[2x]-2[x]$ 要么等于 0，要么等于 1，这使得进一步的我们有：

$$\ln 2n\ -2\ln n!\ge\sum_{p\le 2n}\left(\lfloor\frac{2n}{p}\rfloor-2[\frac{n}{p}]\right)\cdot\ln p$$

又因为当 $n<p\le 2n$ 时，

$$\lfloor\frac{2n}{p}\rfloor-2\cdot\lfloor\frac{n}{p}\rfloor=1$$

从而

$$\begin{aligned}n\cdot\ln 4\ge\ln 2n!-2\ln n!\ge\sum_{n<p\le 2n}\ln p&=\vartheta(2n)-\vartheta(n)\\ \Rightarrow n\cdot\ln 4&\ge\vartheta(2n)-\vartheta(n)\\ \Rightarrow 2^{k+1}\cdot\ln 4&\ge\sum_{r=0}^{k}\vartheta(2^{r+1})-\vartheta(2^r)\\ \Rightarrow 2^{k+2}\cdot\ln 2&\ge\vartheta(2^{k+1})\end{aligned}$$

从而当 $2^k \le n \le 2^{k+1}$ 时，

$$\vartheta(n) \le \vartheta(2^{k+1}) \le 2^{k+2} \cdot \ln 2 \le 4n \cdot \ln 2$$

现在，需要解析数论中常用的一个放缩小技巧，它将 $\vartheta(n)$ 与 $\pi(n)$ 联系起来，尽管不算特别精确。引入参数 α, 其值在 0 到 1 之间。根据定义，我们有

$$(\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \cdot \ln n^\alpha < \sum_{n^\alpha < p \le n} \ln p \le \vartheta(n) < 4n \cdot \ln 2$$

又因为 $\pi(n^\alpha) < n^\alpha$ 所以有

$$\pi(n) < \frac{n}{\ln n} \cdot (\frac{4\ln 2}{\alpha} + \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}) \quad (0 \le \alpha \le 1)$$

取 $\alpha = 1 - \log_n^{\ln n}$，当 n 充分大时，便有

$$(\frac{4\ln 2}{\alpha} + \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}) < 6$$

□

定理 2 的证明. 左右两边的证明方法是类似的，这里只证明右边。令

$$l := \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$$

对每个 $\epsilon > 0$，存在 $x_0 = x_0(\epsilon) \ge 2$，使得

$$\pi(t) \le (l - \epsilon) \cdot \frac{t}{\ln t} \quad (t \ge x_0(\epsilon))$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{t} \ge \int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{t} \\ = \frac{\pi(x)}{x} - \frac{\pi(x_0)}{x_0} + \int_{x_0}^x \pi(t)t^{-2}\mathrm{d}t \\ \ge -1 + (l-\epsilon)\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \\ \ge (l-\epsilon)\ln\ln x + O_\epsilon(1) \quad (\forall \epsilon > 0)\end{aligned}$$

回顾定理 4 的内容，便知道 l 只可能是 1. □

2 证明素数定理的解析方法

2.1 素数定理的证明概要

看完素数定理的证明就会发现，它的证明思路是简单的。只不过证明的每一步为什么成立，却需要大量的前置工作。为了不迷失在大量的前置工作与细节中，本节先介绍一下证明素数定理的思路。

为证明

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

我们首先说明

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (1)$$

$$\Psi(x) \sim x \quad (2)$$

$$\Psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (3)$$

这三者逻辑等价，从而转移到证明式（3）。

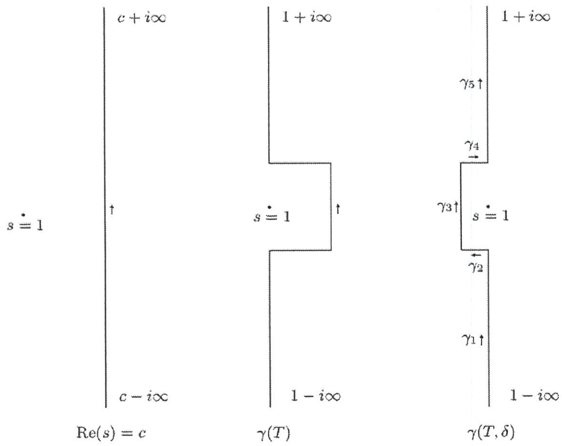

图 1: 摘自 Elias M.Stein Complex analysis. Princeton University Press, 2003.

证明式（3）的关键在于发现

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\mathrm{d}s \quad (c>0)$$

其中 $F(s) = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$

运用留数定理，我们可以进一步说明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)} F(s)\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\mathrm{d}s$$

其中 $\gamma(T)$ 与 $\gamma(T,\delta)$ 如图 1 所示。最后，只要说明

$$\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\mathrm{d}s \sim o(x^2) \quad \delta \to 0^+$$

定理便证明完毕。
观察上面概括性的伪证明，发现有几点是需要我们在证明中说清楚的。
1.$\zeta(s)$ 原本是定义在 $x \geq 1$ 的实数集上的，并在 $x \to 1+$ 时趋于无穷。为了使上述积分有意义，我们如何将它延拓成复平面的亚纯函数?
2. 在积分中我们发现有 $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$ 这一项，为了使积分顺利进行，需要保证在积分的道路上没有 $\zeta(s)$ 的零点。如果我们能说明 zeta 函数在 $Re(s) \geq 1$ 上没有零点，那么取 $delta$ 足够小，就能使图 1 的三条道路积分顺利进行
3. 要说明

$$\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\mathrm{d}s \sim o(x^2)$$

并不容易，我们需要刻画出 $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$ 在某些方向上趋向无穷远时的增长速度。在下面的章节中我们依次解决上述问题。

2.2 $\Gamma(s)$

观察式子

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在数学分析中我们便知道它在 $x > 1$ 时收敛，而在 $x \leq 1$ 时发散。使用复变函数中的 Weierstrass 定理，我们可以毫无难度地将其延拓成 $Re > 1$ 上的解析函数。但到此，在没有其他函数作为工具的情况下，就想将它延拓成为全平面的亚纯函数，似乎让大部分人一筹莫展。
一个不那么费力的方法是使用 Gamma 函数：$\Gamma(s)$。通过 $\Gamma(s)$ 与 $\zeta(s)$ 的联系，我们不仅可以将 $\zeta(s)$ 顺利地延拓到全平面，也可以说明 $\zeta(s)$ 在 $0 \leq Re(s) \leq 1$ 外只有 $\{-2n | n \in \mathbb{N}^+\}$ 这些平凡的零点。
当 $s > 0$ 时，伽马函数被定义为:

$$(4) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

不难看出，这个积分是有意义的，因为在 0 附近，t^{s-1} 可积，而 t 趋向于无穷大时被积函数为 e^{-t} 所控制。

命题 1. *伽马函数可以延拓为右半平面的解析函数，其在右半平面的表达式仍为式 (4)*

证明. 略 □

定理 7. *上面的伽马函数可以延拓为复平面上的亚纯函数，其极点为 $\{-n | n = 1, 2, 3.....\}$。这些极点全部都是单极点，且在 $s = -n$ 处的留数为 $\frac{(-1)^n}{n!}$*

证明. 对式 (1) 进行观察，容易发现其延拓到全平面的阻碍是 0 附近的积分:

$$\int_0^{\epsilon} e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

所以我们将原积分拆成两部分:

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

此时，第二部分为复平面上的全纯函数。至于第一部分，我们将 e^{-t} 泰勒展开，并将积分号与求和号交换，得到:

$$(5) \quad \gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+s)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t \quad (Re(s) > 0)$$

不难检验出，这个新的表达形式在右半平面也仍然有意义。具体来说，它将伽马函数延拓到了全平面，并且“在 $s=-n$ 处为单极点，其留数为 $\frac{(-1)^n}{n!}$” 这一性质几乎可以直接从表达式中看出。 □

我们成功地将 Gamma 函数延拓到了全平面，这为我们以后将 zeta 函数延拓到全平面奠定了基础。为了之后得到 zeta 函数零点的相关信息，我们需要首先证明 Gamma 函数没有零点。然而，从表达式 (5) 入手似乎毫无头绪，为此，我们需要定理 8 的帮助。

定理 8.
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
对 $\forall s\in\mathbb{C}$ 成立

人们第一眼可能会对这个等式成疑，因为等式左右两边都是亚纯函数，存在极点。但仔细注意，两边的极点都刚好是整数集，这得以打消我们第一眼的困惑。因为解析延拓的唯一性，我们只需要证明等式在 $0<s<1$ 上成立即可。

证明. 在对这些特殊函数的处理中，一个常用的技巧就是换元。本来，
$$\Gamma(1-s)=\int_0^\infty e^{-u}u^{-s}\mathrm{d}u$$
现在做换元 $vt=u$, 得到：
$$\Gamma(1-s)=\int_0^\infty t\cdot e^{-vt}(vt)^{-s}\mathrm{d}v$$
从而
$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s)&=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\Gamma(1-s)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\left(\int_0^\infty t\cdot e^{-vt}(vt)^{-s}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(1+v)}v^{-s}\mathrm{d}vst\\&=\int_0^\infty\frac{v^{-s}}{1+v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}\end{aligned}$$
□

推论 6. $\Gamma(s)$ 没有零点

证明. 反证法。假设 $\Gamma(s)$ 有零点 z。则观察等式
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
如果 $1-z$ 不是 $\Gamma(1-z)$ 的单极点，则等式左边等于 0。但要想等式右边等于零，则 $\pi(z)$ 应该为 $\sin(\pi s)$ 的单极点，即：$z\in\mathbb{Z}$. 当 z 为正整数时，$1-z$ 为 $\Gamma(1-s)$ 的单极点，这种情况不行。若 z 为大于等于零的整数，其不是 $\Gamma(s)$ 的零点。从而只能假设 $1-z$ 是 $\Gamma(1-s)$ 的单极点。此时，$z\in\mathbb{N}^+$ 且等式左边不是无穷大。但此时等式右边是无穷大。所以无论如何都会矛盾。 □

注：关于 Gamma 函数，作者是为了依次得到想要的结论显得思路清晰，才刻意选择了这样一个顺序。但历史的发展并非如此。欧拉关于 Gamma 函数的最初定义可以直接推广到全平面。并且通过这个表达式可以较为轻松地看出其没有零点。详细可见参考文献 [2] 的第二部分。

2.3 $\zeta(s)$

为了将 zeta 函数延拓到全平面，如上节所说，我们需要发现它们两者之间的联系。定义实数轴上的 theta 函数为

$$\vartheta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

使用 2.2 节的 Possion 公式，我们有：

$$\vartheta(t)=t^{1/2}\vartheta(1/t)$$

观察上述两个等式，不难发现：

命题 2. *存在某个固定的 C, 使得：当 $t\to\infty$ 时*

$$\vartheta(t)\le C\cdot t^{-1/2}$$

and

$$|\vartheta(t)-1|\le C\cdot e^{-\pi t}$$

现在，我们可以用下面两个定理将 zeta 函数延拓到全平面。

定理 9. *当 $Re(s)>1$ 时，有*

$$(\pi)^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{s/2-1}[\vartheta(u)-1]\mathrm{d}u$$

证明. 换元即可，只是不容易看出。 □

定理 10. *当 $Re(s)>1$ 时，定义函数*

$$\xi(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{s/2-1}[\vartheta(u)-1]\mathrm{d}u \tag{6}$$

则它可以延拓为全平面的亚纯函数。它只有两个单极点，分别为 1 和 0。并且还有性质

$$\xi(s)=\xi(1-s)$$

证明. 证明思路与将 Gamma 函数延拓的思路类似，都是看到它们延拓的障碍是 0 附近的积分，而冀求于将这部分积分变形。具体来说，将

$$\vartheta(t)=t^{1/2}\vartheta(1/t)$$

代入式 (6) 中，有：

$$\xi(s)=\frac{1}{2}\int_0^{1} u^{s/2-1}[\vartheta(u)-1]\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} u^{s/2-1}[\vartheta(u)-1]\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{1} u^{s/2-1}\left[u^{-1/2}\frac{\vartheta(1/u)-1}{2}+\frac{1}{2u^{1/2}}-\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} u^{s/2-1}[\vartheta(u)-1]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^{\infty}\left(u^{-s/2-1/2}+u^{s/2-1}\right)\frac{\vartheta(u)-1}{2}\mathrm{d}u \quad (Re(s)>1)$$

根据命题 2，知道：

$$\int_1^\infty \left(u^{-s/2-1/2}+u^{s/2-1}\right)\frac{\vartheta(u)-1}{2}\mathrm{d}u$$

在全平面有意义，从而

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^\infty \left(u^{-s/2-1/2}+u^{s/2-1}\right)\frac{\vartheta(u)-1}{2}\mathrm{d}u$$

就是 $\xi(s)$ 在全平面的表达式。而且由表达式就能看出 $\xi(s)=\xi(1-s)$ □

推论 7. *zeta 函数可以延拓为全平面上的亚纯函数。它只有一个在 $s=1$ 处的单极点，且此点的留数为 1.*

证明. 由式子

$$(7)\quad \zeta(s)=\pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)}$$

即可看出 □

我们成功地将 zeta 函数延拓到了全平面。并且从上面的式子 (4) 其实就能看出，zeta 函数在 $s=-2,-4,-6...$ 处取值为零, 只是这依然不够。看 2.1 节的图 1，如果我们能说明 $\zeta(s)$ 在 $Re(s)>1$ 时都不为零，那 2.1 节中的积分就可以放心大胆地进行了。下面，我们一步步证明上述结论。

定理 11. *zeta 函数在区域 $Re(s)>1$ 不存在零点*

证明. 容易证明

$$\zeta(x)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-x}}\quad (x>1)$$

也容易看出等式右端的无线连乘在区域 $Re(s)>1$ 有意义而且解析。从而根据延拓的唯一性，我们有：

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\quad (Re(s)>1)$$

于是假设在此区域内有零点 z，便有：

$$\zeta(z)=0\Rightarrow \ln\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}=-\infty\Rightarrow\sum_p \ln\frac{1}{1-p^{-s}}=-\infty$$

进一步的，使用对数函数的泰勒公式，便能推出：

$$\sum_{p,m}\frac{p^{-ms}}{m}=\infty$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{1}{n^s}=\infty$$

其中当 $n=p^m$ 时 $c_n=\frac{1}{n}$, 其余时候等于 0. 这显然矛盾了 □

定理 12. *zeta 函数在 $Re(s)=0$ 上没有零点。*

为证明上述定理，我们需要下面两个引理：

引理 1.

$$3+4\cos(\theta)+\cos(2\theta)\geq 0$$

引理 2. 设 $s=\sigma+it$, 若 $\sigma>0$, 则有:

$$\ln|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)|\geq 0$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\ln|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)|\\
&=3\ln|\zeta(\sigma)|+4\ln|\zeta(\sigma+it)|+\ln|\zeta(\sigma+2it)|\\
&=3Re\ln\zeta(\sigma)+4Re\ln\zeta(\sigma+it)+Re\ln\zeta(\sigma+2it)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-\sigma}(3+4\cos(\theta_n)+\cos(2\theta_n))
\end{aligned}$$

其中 $\theta_n=t\ln n$ 由引理 1，上式大于等于零。 □

现在我们可以很轻松地证明定理 12. 注意到如果存在 t_0, 使得 $\zeta(1+it_0)=0$, 那么

$$|\zeta^4(\sigma+it)|\leq C(\sigma-1)^4 \quad (\sigma\to 1)$$

$$|\zeta^3(\sigma)|\leq C'(\sigma-1)^{-3} \quad (\sigma\to 1)$$

$$|\zeta(\sigma+2it)|\leq M \quad (\sigma\to 1)$$

其中 C,C',M 是常数。从而

$$\lim_{\sigma\to 1+}\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)=0$$

$$\Rightarrow \ln|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)|=-\infty$$

矛盾。从而 zeta 函数在 $Re(s)=1$ 上没有零点。
走到现在，我们已经证明了 zeta 函数在 $Re(s)\geq 1$ 上没有零点。回顾 2.1 节的证明过程，这个结论对素数定理的证明已经够用了。尽管再非常轻松地观察 $\xi(s)=\xi(1-s)$, 即

$$(\pi)^{-(1-s)/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=(\pi)^{-s/2}\Gamma(1-s/2)\zeta(1-s)$$

就能得到:

定理 13. *zeta* 函数在条状区域 $0<Re(s)<1$ 外的零点只有 $-2,-4,-6......$

如今，我们只剩下一项工作, 就是判断 $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ 的性态。介于这部分的工作无聊而冗长，就直接在这里放上相应的结论了。

定理 14. 在区域 $\sigma\geq 1,|t|\geq 1$ 上，$\forall\epsilon>0$, 都有

$$(i)\quad 1/|\zeta(s)|\leq C_\epsilon|t|^\epsilon$$

$$(ii)\quad |\zeta'(s)|<C_\epsilon|t|^\epsilon$$

推论 8. 在区域 $\sigma\geq 1,|t|\geq 1$ 上，存在常数 A，使得

$$|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}|<A|t|^{1/2}$$

定理 15. 在区域 $Re(s)>0$ 上，

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+M(s)$$

其中 $M(s)$ 为该区域上的解析函数。

2.4 素数定理的证明

定理 16.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \iff \Psi(x) \sim x \iff \Psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

证明. 第一个和第二个等式等价的证明与第一章大部分定理的证明一样，是灵活使用定理 1，证明可参见 [1]. 第二个推出第三个也很显然。至于（3）推（2），因为 $\Psi(x)$ 是递增函数，所以对任意 $\alpha < 1 < \beta$, 有

$$\frac{1}{(1-\alpha)x}\int_{\alpha x}^{x}\Psi(u)\mathrm{d}u \le \Psi(x) \le \frac{1}{(\beta-1)x}\int_{x}^{\beta x}\Psi(u)\mathrm{d}u$$

关于左边不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\le \frac{1}{(\beta-1)x}[\Psi_1(\beta x) - \Psi_1(x)] \\
\Rightarrow \frac{\Psi(x)}{x} &\le \frac{1}{(\beta-1)}\left[\frac{\Psi(\beta x)}{(\beta x)^2}\beta^2 - \frac{\Psi(x)}{x^2}\right] \\
\Rightarrow \limsup_{x\to\infty}\frac{\Psi(x)}{x} &\le \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(\beta+1) \qquad (\forall \beta > 1) \\
\Rightarrow \limsup_{x\to\infty}\frac{\Psi(x)}{x} &\le 1
\end{aligned}$$

同理，

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\Psi(x)}{x} \ge 1$$

□

按照 2.1 节的概要，下面我们证明

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\mathrm{d}s \quad (c > 0)$$

引理 3.

$$\Psi_1(x) = \sum_{n\ge x}\Lambda(n)(x-n)$$

证明. 观察到

$$\Psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)f_n(u)$$

其中当 $n \le u$ 时 $f_n(u) = 1$, 当 $n > u$ 时，$f_n(u) = 0$. 从而

$$\Psi_1(x) = \int_0^x \Psi(u)\mathrm{d}u = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\int_n^x \mathrm{d}u = \sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n)$$

□

引理 4. 当 $c > 0$ 时，我们有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s(s+1)}\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & (0 < a < 1) \\ 1 - 1/a & (1 \le a) \end{cases}$$

证明. 作为复变函数的一道常见练习题，略。 □

定理 17.

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\mathrm{d}s \quad (c > 0)$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}\right)\mathrm{d}s\\
=&x\sum_{n\le x}\lambda(n)\left(1-\frac{n}{x}\right)=\Psi_1(x)
\end{aligned}$$

□

现在，可以证明素数定理了。

定理 18 (素数定理).

$$\pi(x)\sim x/\ln x$$

证明. 首先，使用柯西定理和推论 8，我们有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)}F(s)\mathrm{d}s$$

其次，再使用留数定理，得到：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)}F(s)\mathrm{d}s=Res[F(1)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\epsilon)}F(s)\mathrm{d}s$$

根据定理 15,

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+M(s)=\frac{1}{s-1}\left[1+(s-1)M(s)\right]=\frac{1}{s-1}+H(s)$$

从而

$$\begin{aligned}
&\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}+\frac{H'(s)}{H(s)}\\
\Rightarrow\ &Res\frac{\zeta'(1)}{\zeta(1)}=1\Rightarrow Res[F(1)]=\frac{x^2}{2}\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)}F(s)\mathrm{d}s=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)}F(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

现在，如图所示，将 $\gamma(T,\epsilon)$ 分成 5 部分：$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$, 分别去估计它们的阶。

对 γ_1 与 γ_5, 首先 $|x^{1+s}|=x^2$. 根据定理 15, 我们有

$$|\int_{\gamma_1}F(s)\mathrm{d}s|\le x^2\int_T^{\infty}|F(s)|\mathrm{d}s\le A'x^2\int_T^{\infty}\frac{t^{1/2}}{t^2}\mathrm{d}t$$

显然，最后这个积分收敛，从而对 $\forall\epsilon$, 我们可以选取足够大的 T 使得最后这个积分小于 ϵx^2. 然后，固定 T，我们让 δ 足够的小，使得 γ_3 上没有 zeta 函数的零点。在 γ_3 上，$|x^s|=x^{2-\delta}$，从而

$$|\int_{\gamma_3}F(s)\mathrm{d}s|\le C_Tx^{2-\delta}$$

最后，在 γ_2 和 γ_4 上

$$|\int_{\gamma_3}F(s)\mathrm{d}s|\le C_T'\int_{1-\delta}^{1}x^{1+\sigma}\mathrm{d}\sigma\le C_T'\frac{x^2}{\ln x}$$

结合在一起，我们有

$$\begin{aligned}
&|\Psi_1(x)-\frac{x^2}{2}|\le 2\epsilon x^2+2C_Tx^{2-\delta}+2C_T'\frac{x^2}{\ln x}\\
\Rightarrow\ &|\frac{2\Psi_1(x)}{x^2}-1|\le 2\epsilon\quad as\ x\to\infty
\end{aligned}$$

由 ϵ 任意性，我们得到：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\Psi_1(x)}{x^2}=1$$

□

3 证明素数定理的初等方法

在素数定理的解析证明发表后的很长一段时间里，一些数学家都相信没有证明素数定理的初等办法，因为这样才能显示素数定理的“深度”。但在 1949 年，年仅 31 岁的 Selberg 与 Erdos 独立地，只利用初等方法和最朴素的一点微积分，便证明了素数定理，轰动了当时的数学界。阅读不同的初等证明，容易发现它们的关键都在于 Selberg 不等式（或它的等价形式）：

$$\Psi(x)\ln x+\sum_{n\leq x}\Psi(\frac{x}{n})\Lambda(n)=2x\ln x+O(x)$$

观察这个式子，你会发现它已经相当的精确了，等式右边不是模糊的 $O(x\ln x)$，而是精确的 $2x\ln x$，这很难不让人产生一种感觉：$\Psi(x)\sim x$. 阅读后面的证明就会看到，为了用初等方法获得这个不等式，Selberg 融入了很多组合思想在里面，他利用莫比乌斯反转公式和精心的函数拼凑，抵消掉了相当大的误差。

3.1 若干简单结果

本节主要讲一些之后证明要用到的东西。并且在此章和之后的章节中，x 代表大于等于零的实数。但在证明中，我往往会为了简化而取 x 为整数。（每次把结论从整数扩展到实数上都需要几句几乎相同的话）

在第一章中我们已经证明了存在常数 A 与 B，使得以下不等式成立：

$$A\frac{x}{\ln x}\leq\pi(x)\leq B\frac{x}{\ln x}$$

再结合我们论证 $\Psi(x)\sim x$ 与 $\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$ 逻辑等价的手法，我们很容易得到：

命题 3.

$$\Psi(x)=O(x)$$

定理 19.

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\ln x+r+O(\frac{1}{x})$$

其中 r 为欧拉常数。

命题 4.

$$\sum_{n\leq x}\Psi(\frac{x}{n})=x\ln x-x+O(\ln x)$$

证明.

$$\sum_{n\leq x}\Psi(\frac{x}{n})=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{n\leq x}\ln n=\ln x!$$

□

下面，我们假定 $V(y)$ 是定义在正半轴的实函数。

定理 20. 设

$$\alpha=\limsup_{y\to\infty}|V(y)|<\infty$$

$$\beta=\limsup_{z\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y|V(z)|\mathrm{d}z$$

并且

$$(9)\quad y^2|V(y)|\leq 2\int_0^y\mathrm{d}z\int_0^z|V(w)|\mathrm{d}w+O(y)$$

则 $\alpha=\beta$

证明. 一方面，$\alpha \geq \beta$ 很容易就可以看出。另一方面，由定理给出的条件，我们有

$$|V(y)| \leq \alpha + o(1)$$

$$\int_0^y |V(z)|\mathrm{d}z \leq \beta y + o(y)$$

再由式 (9)，得

$$y^2|V(y)| \leq 2\int_0^y (\beta z + o(z)\mathrm{d}z + O(y) = \beta y^2 + o(y^2)$$

$$\Rightarrow |V(y)| \leq \beta + o(1)$$

从而

$$\alpha \leq \beta$$

□

定理 21. 设 $V(y)$ 是逐段连续的函数，且其在连续区间上是递减的，而在不连续点上是跳跃增的。设当 η 是 (y) 的零点时，有

$$|V(\eta+\epsilon)| \leq \epsilon + O(\frac{1}{\eta}) \quad (\epsilon > 0, \eta \to \infty)$$

最后设对于任意正数 a, b 都有

$$|\int_a^b V(z)\mathrm{d}z| < A$$

其中 A 与 a, b 无关，则当 $\alpha > 0$ 时，有

$$\beta < \alpha$$

证明. 证明中没有任何新颖的东西，算是一道挺难的数学分析题，详细见 [3] □

综合以上两个定理，我们立即得到：

定理 22. 设 $V(y)$ 是确定在 $y \geq 0$ 上的逐段连续的函数满足一下条件：
$(i)V(y)$ 在连续区间是递减的，而在不连续点是跳跃增的。
$(ii)\alpha = \limsup_{y\to\infty}|V(y)| < \infty$
(iii) 对任意正数 a, b，都有与它们无关的常数 A 使得：

$$|\int_0^y V(z)\mathrm{d}z| < A$$

(iv) $y^2|V(y)| \leq 2\int_0^y \mathrm{d}z \int_0^z (w)|\mathrm{d}w + O(y)$
(v) 当 η 是 (y) 的零点时，有

$$|V(\eta+\epsilon)| \leq \epsilon + O(\frac{1}{\eta}) \quad (\epsilon > 0, \eta \to \infty)$$

则 $\alpha = 0$

3.2 Selberg 不等式及其推论

引理 5.

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1)$$

证明. 如上面所言，假定 x 为整数。于是：

$$\ln x! = \sum_{p\le x}\ln p \sum_{v\le\lfloor\frac{\ln x}{\ln p}\rfloor}\lfloor\frac{x}{p^v}\rfloor$$

$$=\sum_{p\le x}\sum_{v\le\lfloor\frac{\ln x}{\ln p}\rfloor}\frac{x}{p^v}\ln p + O\left(\sum_{p\le x}\lfloor\frac{\ln x}{\ln p}\rfloor\right)$$

$$= x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + O(x)$$

由推论 2，上式左端为 $x\ln x + O(x)$，从而两边同除 x 得：

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1)$$

□

引理 6. 设 $F(x)$ 为确定在 $x\ge 1$ 上的任意函数，而

$$G(x) = \sum_{n\le x}F(\frac{x}{n})\ln x \quad (x\ge 1)$$

则：

$$\sum_{n\le x}\mu(n)G(\frac{x}{n}) = F(x)\ln x + \sum_{n\le x}F(\frac{x}{n})\Lambda(n)$$

证明.

$$\sum_{n\le x}\mu(n)G(\frac{x}{n}) = \sum_{n\le x}\mu(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}F(\frac{x}{mn})\ln\frac{x}{n}$$

$$=\sum_{n\le x}F(\frac{x}{n})\sum_{d|n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}$$

$$=\sum_{n\le x}F(\frac{x}{n})\ln x\sum_{d|n}\mu(d) - \sum_{n\le x}F(\frac{x}{n})\sum_{d|n}\mu(d)\ln d$$

$$= F(x)\ln x + F(\frac{x}{n})\Lambda(n)$$

□

有了上面两个引理，现在我们可以证明 Selberg 不等式了。

定理 23. 当 $x\ge 1$ 时

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi(\frac{x}{n})\Lambda(n) = 2x\ln x + O(x)$$

证明. 在引理 6 中令 $F(x) = \Psi(x) - x + r + 1$ 其中 r 为欧拉常数（为什么这样做，下面就能看出）我们有

$$(8)\quad G(x) = \sum_{n\le x}\Psi(\frac{x}{n})\ln x - \sum_{n\le x}\frac{x}{n}\ln x + \sum_{n\le x}(r+1)\ln x$$

其中，由命题 4 式 (8) 右边第一项等于

$$x\ln^2 x - x\ln x + O(\ln^2 x)$$

由定理 19，右边第二项为

$$-x\ln^2 x - x\ln x + O(\ln^2 x)$$

显然，右边第三项为

$$(r+1)x\ln x+O(\ln x)$$

把以上三式加起来，便得到：

$$G(x)=O(\ln^2 x)=O(x^{1/2})$$
$$\Rightarrow\sum_{n\le x}\mu(n)G(\frac{x}{n})=O(x)$$

从而

$$F(x)\ln x+F(\frac{x}{n})\Lambda(n)=O(x)$$

把 $F(x)=\Psi(x)-x+r+1$ 代入上式，并利用命题 3 与引理 5，便得到

$$\Psi(x)\ln x+\sum_{n\le x}\Psi(\frac{x}{n})\Lambda(n)=2x\ln x+O(x)$$

□

推论 9. 设 $R(x)=\Psi(x)-x$，则：

$$R(x)\ln x+\sum_{n\le x}R(\frac{x}{n})\Lambda(n)=O(x)$$

尽管 Selberg 不等式是这个初等证明的关键，但在最后的证明中，我们需要的是与之类似的积分不等式：

定理 24.

$$|R(x)|\ln^2 x\le 2\int_1^x|R\left(\frac{x}{t}\right)|\ln t\mathrm{d}t+O(x\ln x)$$

证明. 定理的证明不再需要比 Selberg 不等式更精确的估计，主要就是熟练地使用实变的估计和变形技巧，当然也需要强大的拼凑能力。详细请见 [3] □

在最后的证明中，我们需要的是定理 21 的以下形式：

定理 25. 令 $V(y)=e^{-y}R(e^y)=e^{-y}\Psi(e^y)-1$，则

$$y^2|V(y)|\le 2\int_0^y\mathrm{d}z\int_0^z|V(w)|\mathrm{d}w+O(y)$$

证明. 在定理 21 中令 $x=e^y,t=e^{-z}$ 即可。 □

3.3 初等证明

正如论文第二章所说，要证明

$$\pi(x)\sim x/\ln x$$

只需要证明 $\Psi(x)\sim x$. 即只需要证明 $R(x)=\Psi(x)-x=o(x)$ 以及 $V(y)=e^{-y}\Psi(e^y)-1=o(1)$，于是，问题转化成了只需要我们证明：

$$a=\limsup_{y\to\infty}|V(y)|=0$$

回顾 3.1 节定理 22 便知道，我们只需要验证 $V(y)$ 满足定理 22 的 5 个条件就大功告成。条件 $(i),(ii),(iv)$ 显然满足，接下来只需要验证 (iii) 和 (v). 对于 (iii)，我们只需要验证

$$\int_0^y V(z)\mathrm{d}z+O(1)$$

令 $x=e^y, t=e^z$ 即得:

$$\begin{aligned}\int_0^y V(z)\mathrm{d}z &= \int_1^x \left(\frac{\Psi(t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\Psi(t)}{t^2}\mathrm{d}t - \ln x \\ &= \int_1^x \left(\sum_{n\le t}\Lambda(n)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \ln x \\ &= \sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{\Psi(x)}{x} - \ln x + O(1)\end{aligned}$$

由引理 5 与命题 3，我们知道上式为 $O(1)$, 因此 (iii) 满足。为验证条件 (v)，还是从 Selberg 不等式入手。由

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{mn\le x}\Lambda(m)\Lambda(n) = 2x\ln x + O(x)$$

容易推出当 $x>y$ 时

$$\Psi(x)\ln x - \Psi(y)\ln y + \sum_{y\le mn\le x}\Lambda(m)\Lambda(n) = 2(x\ln x - y\ln y) + O(x)$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \Psi(x)\ln x - \Psi(y)\ln y + \sum_{y\le mn\le x}\Lambda(m)\Lambda(n) = 2(x\ln x - y\ln y) + O(x)\\ &\Rightarrow \Psi(x)\ln x - \Psi(y)\ln y \le 2(x\ln x - y\ln y) + O(x)\\ &\Rightarrow |R(x)\ln x - R(y)\ln y| \le x\ln x - y\ln y + O(x)\end{aligned}$$

然后再令 $x=e^{\psi+\epsilon}, y=e^{\psi}$, 结合 $R(y)=0$, 代入上式，得

$$\begin{aligned}&|R(x)|\ln x \le x\ln x - y\ln y + O(x)\\ &\Rightarrow \frac{|R(x)|}{x} \le 1 - \frac{y\ln y}{x\ln x} + O(\frac{1}{\ln x})\end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned}|V(\eta+\epsilon)| &\le 1 - \frac{\eta}{\eta+\epsilon}e^{-\epsilon} + O(\frac{1}{\eta})\\ &= 1 - e^{-\epsilon} + \left(1-\frac{\eta}{\eta+\epsilon}\right)e^{-\epsilon} + O(\frac{1}{\eta})\\ &\le \epsilon + O(\frac{1}{\eta})\end{aligned}$$

从而 (v) 也满足，素数定理得证。

4 致谢

在这里，想感谢朱一飞老师。四年大学，我的第一节数学课就是由朱老师教的。课上他讲了几个简单不等式、向量还有无尽小数。因为以前没有过什么数学启蒙，所以那节课决定了我的很大一部分数学品味，也让我决定还是不去海洋或者生物系好了。

5 参考文献

[1]Barry Mazur, William Stein.Prime Numbers and the Riemann Hypothesis. Cambridge University Press,2015.

[2]Elias M.Stein Complex analysis. Princeton University Press, 2003.

[3] 闵嗣鹤 数论的方法 北京：科学出版社，2011

[4] 特伦鲍姆 and 陈华一. 解析与概率数论导引. 北京：高等教育出版社，2011.

[5] Tom M.Apostol Introduction to Analytic Number Theory. Springer,2013.