南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

本科生毕业设计（论文）

题　　目：方程的对称性理论及其应用

姓　　名：高梓灿

学　　号：11410197

系　　别：数学系

专　　业：数学与应用数学

指导教师：朱一飞

2019 年 4 月 28 日

诚信承诺书

1. 本人郑重承诺所呈交的毕业设计（论文），是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料均真实可靠。

2. 除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。

3. 本人承诺在毕业论文（设计）选题和研究内容过程中没有抄袭他人研究成果和伪造相关数据等行为。

4. 在毕业论文（设计）中对侵犯任何方面知识产权的行为，由本人承担相应的法律责任。

作者签名：[redacted]

2019 年 4 月 28 日

方程的对称性理论及应用

Principles of Symmetries in Equations and Their Applications

高梓灿

（数学系　指导老师：朱一飞）

[摘要]：本文主要是建立在 Jerry L.Kazdan 的一篇文章“Solving Equations,An Elegant Legacy”中探索方程对称性的基础上展开，并参考了范后宏著《数学思想要义》中关于对称性的内容，先是介绍对称性的基本原理，从简单的对称关系入手再到平移不变性，并将对称性引申至代数层面的置换群、对称群，介绍了在微分方程中有着广泛应用的 Lie 对称。然后阐述两项重要的对称性理论，分别是在代数方程根间的置换影响这一背景下提出的 Galois 定理和揭示守恒量的对称性关系的 Noether 定理。最后，本文将着重介绍对称性在解方程上的具体应用，包括代数方程，微分方程等。其中会涉及比较多有趣的例子，如 Pell 方程，Markov 链，Euler 算子，波动方程等。

[关键词]：对称性；Lie 对称；Galois 定理；Noether 定理

[ABSTRACT]： This article is mostly based on an exploration of the symmetry of equations in an article by Jerry L.Kazdan, " Solving Equations,An Elegant Legacy" ,and refer to the content of symmetry in Houhong Fan's "The Essentials of Mathematical Thoughts".Firstly,we introduce the basic principles of symmetry,starting with simple symmetry and translation invariance.And the symmetry is extended to the algebraic level of permutaion groups and symmetry groups.Lie groups which is widely applied in differential equations is also introducded.Then we elaborate two improtant symmetry theorem,which are Galois theorem proposed in the backgroud of the permutation effect between the roots of algebraic equation and Noether theorem that reveals the symmetry of the conserved quantity.Finally,this paper will focus on the specific applications of the symmetry in solving equations,including algebraic equations,differential equations and so on.There are many interesting examples involved,such as Pell equation,Markov's chain,Euler operator,wave equation,and so on.

[Keywords]: symmetry;Lie symmetry;Galois theorem;Noether theorem

目录

引言

对称性这一关系最早出现在几何当中，主要描述的是某一运算作用在特定物体上时，该运算并不会改变物体本身或者其外观，常见的在欧几里得空间中的几种变换有：平移、旋转、镜射和滑移。在此之后，对称性的概念被广泛延伸，应用到了数学物理的各个范围，它的精确含义也随之变化，更多的表示系统能够在某些变换下保持状态等价的性质。

在一般代数方程中，对称性通常描述的是根式解的分布对称（以通式而言，总能通过平移不变性寻找到对称性），但是对于高阶方程或者多元代数方程，根式求解的运算会显得非常复杂。法国数学家伽罗瓦（Galois）在 1830 年提出了用群论解决根式求解代数方程的问题，系统化阐释了五次以上方程没有公式解，而四次以下有公式解，并由此发展成一整套关于群和域的 Galois 理论。

挪威数学家 SophusLie 受到了 Galois 理论的影响，引进了连续群的概念（后称为李群），他通过寻找给定方程的对称群，因为对称群可以将方程的一解对称化转变为另一解，再由一特解生成依赖于参数的新解，所以，如果某一偏微分方程在李变换群的作用下仍然不变，那么我们就可以得到关于微分方程对称的决定方程组，求解这一决定方程组，即可获得相应的对称关系。再由对称出发构造所需特解（也称相似解或不变解），代入原方程组即可达到降维或者降次的目的。Lie 对称分析被广泛应用于代数拓扑、几何、经典力学等各个领域，在构造非线性偏微分方程精确解上有着重要作用，也适用于高阶常微分方程的降次问题，它突破了数学物理上许多求解复杂的方程。

完整的对称性理论建立于物理学当中的量子力学，我们现在所说的对称性原理，通常是指德国数学家艾米·诺特（Emmy Noether）提出的 Noether 定理，这一定理揭示了系统的对称性与物理量的守恒性之间有着密切联系，也就是对称性与守恒定律相互对应，例如系统的空间平移对称性说明系统动量守恒，系统的时间平移对称性说明系统能量守恒，当然 Noether 定理在积分方程上也有一定应用。为了避免歧义，本文标题采用的是“方程的对称性理论”而非原理或定理，所涵盖的范围也相对较大些。

事实上，关于对称性还有很多重要概念是本文没有提出的，诸如空间和时间反演对称、对称破缺等，由于涉及较多量子力学上的概念，本文将不赘述。另外，一些比较经典的数学物理问题，例如 Maxwell 方程组的推导、洛伦兹变换、Hamilton 方程，也不在本文的介绍范围之内，所以不会涉及到。

第一章 对称性原理

1.1 一般对称性

我们首先给出对称的一般定义如下：

定义 1.1. 对于 $\forall\ a,b\in X$，若 $aRb\Rightarrow bRa$，则称集合 X 上的二元关系 R 是对称的。

注记 1.2. X 也可以泛指一般系统，R 表示变换关系，且具有对称性。

这里的对称性反映了系统能在某些变换关系下保持状态等价的性质，其本质是变化中的不变性。[1] 一个系统可以用其所包含的对称变换来表示，也就是说，可以用一个对称变换的集合来描述系统的对称性，集合中的元素越多，则该系统的对称性也就越高。

以一个简单的代数多项式入手 $p(z)=a_nz^n+\cdots a_1z+a_0$，其中 a_i，$i=0,1,\cdots,n$ 均为实数，a_i 在复共轭下是不变的，所以对于任意复数 z 有 $\overline{p(z)}=\sum\overline{a_kz^k}=\sum a_k\bar{z}^k=p(\bar{z})$。[2] 因此如果 z 是一个复根，$\bar{z}$ 是另一复根。用复共轭算子来表示这一对称变化，为 $T(z)=\bar{z}$，则 $T^2=I$（Identity）且 $(Tp)(z)=T(p(z))$，$pT(z)=Tp(z)$，p 在自同构 T 的作用下保持不变，$T^{-1}pT=p$。

考虑方程 $F(x)=c$，假设 F 和映射 T 可交换，即 $TF=FT$，c 在 T 的作用下保持不变，$T(c)=c$。若 x_0 是方程 $F(x)=c$ 的一个解，显然 $T(x_0)$ 是另一解。如果方程 $F(x)=c$ 的解唯一，则 $T(x_0)=x_0$，这说明 x_0 在 T 的作用下保持不变。映射 T 其实就扮演了变换关系，由于其可交换性，我们可以一直找到方程的对称解。Galois 在后来解决多项式方程的理论上也展示了利用相关对称性的重要作用。

1.2 平移不变性

定义 1.3. 平移算子T_α：$(T_\alpha u)(x) := u(x+\alpha)$，其中$u(x)$为某一给定函数。

推论 1.4. 平移算子的特征函数是指数形式：$T_\alpha e^{cx} = \mu e^{cx}$，其中$\mu = e^{c\alpha}$。

讨论常系数线性微分算子 $Lu = au'' + bu' + cu$，其中a,b,c为常熟，L和T_α具有可交换性，上述指数同时也是L的特征函数，由可交换性显然这是正确的。下面我们证明更一般的例子，对于任意与T_α可交换的线性映射L也成立。

记$q(x;\lambda) := Le^{\lambda x}$，由推论 1.4，$T_\alpha e^{\lambda x} = e^{\lambda\alpha} e^{\lambda x}$，于是有

（1.1） $$T_\alpha L e^{\lambda x} = T_\alpha(q(x;\lambda)) = q(x+\alpha;\lambda)$$

（1.2） $$LT_\alpha(e^{\lambda x}) = e^{\lambda\alpha} L e^{\lambda x} = e^{\lambda\alpha} q(x;\lambda)$$

对比（1.1）和（1.2）在$x=0$的情况，观察到若线性映射L与平移算子可交换，则 $q(a;\lambda) = q(0;\lambda)e^{\lambda\alpha}$ 对于任意α成立，等价地有，$q(x;\lambda) = q(0;\lambda)e^{\lambda x}$。记$Q(\lambda) := q(0;\lambda)$，于是有

（1.3） $$Le^{\lambda x} = Q(\lambda)e^{\lambda x}$$

因此$e^{\lambda x}$即为L的特征函数，对应的特征根为$Q(\lambda)$。

为了更好地研究平移不变性，我们将（1.3）应用到解方程 $Lu = f$ 上。f和u可以表示为指数的线性组合（或者指数积分）：$f(x) = \sum f_\lambda e^{\lambda x}, u(x) = \sum u_\lambda e^{\lambda x}$，于是，$Lu = \sum u_\lambda Q(\lambda) e^{\lambda x}$。对于齐次方程 $Lu = 0$ 可以参照$Q(\lambda)$的根，对于非齐次方程我们可以将参数一一对应，得到 $u_\lambda = \dfrac{f_\lambda}{Q(\lambda)}$，由此找到了方程的一个解为 $u(x) = \sum \dfrac{f_\lambda}{Q(\lambda)} e^{\lambda x}$。由于$Q(\lambda)$出现在式子的分母当中，其零点的取值就显得非常重要，特别是在偏微分算子中。

回到最开始的二阶微分算子 $Lu = au'' + bu' + cu$，则 $Le^{\lambda x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}$，

所以 $Q(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$。当$Q(r)=0$，$u(x)=e^{rx}$ 是 $Lu=0$ 的一解；当$Q(r)\neq 0$，$u(x)=\dfrac{e^{rx}}{Q(r)}$ 是 $Lu=e^{rx}$ 的一个特解；当$Q(r)=0$，但$Q'(r)\neq 0$，则可以通过取（1.3）关于λ的求导在$\lambda=r$的取值，去求解 $Lu=e^{rx}$；类似地，当r是 $Q(\lambda)=0$ 的二重根，且 $Q'(r)\neq 0$，同样取（1.3）关于λ的求导在$\lambda=r$的取值，得到 $u(x)=xe^{rx}$ 是齐次方程的一解。

1.3 对称群

在以下定义中，设R是一个非空的有限集合，例如R可以是某个多项式所有根组成的集合。

定义 1.5. R上的置换定义为从R到R的一一对应的映射。当 $R=\{1,\cdots,\ n\}$ 时，置换通常记作 $\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ j_1 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$。[3]

定义 1.6. 设R中的元素个数是n。集合$S_n=\{R$上的所有置换$\}$带上置换的乘积运算称为置换群。

注记 1.7. S_n中的单位元定义为R上的恒同映射，a的逆元定义为a的逆映射，记作a^{-1}。定义$a^0=1$，$a^{-k}=\left(a^{-1}\right)^k$，$k$为正整数。

定义 1.8. 以置换群为子群的一类具体的有限群，称为对称群，若R中的元素个数是n，则称n次对称群。

对称群主要有四种类型：（1）只有恒等变换；（2）有恒等变换和一个反射变换；（3）有n个旋转变换但没有反射变换（循环群）；（4）有n个旋转变换和反射变换（二面体群）。[4]

定理 1.9. 任何置换都可以表示为有限个对换（即长度为 2 的置换）的乘积。同一置换的两种对换乘积表示中，对换个数的奇偶性相同。

证明：考虑每一个循环 $\alpha=(i_1,i_2,\cdots,i_r)$ 都可以写成 $r-1$ 个对换的乘积：

$(i_1,i_2,\cdots,i_r)=(i_1,i_2)(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_r)$，因此任何置换都可以分解为有限个对换的乘积。为了证明对换个数的奇偶性不变，我们用某一对换(a,b)右乘该置换，此时得到的新置换所含对换个数与原置换恰好相反，而每次恒等变换所含对称的个数为0，因此其奇偶性相同。 □

定义 1.10. 如果一个置换可以表示为偶数个对换的乘积，称为偶置换。

定义 1.11. 设R中的元素个数是n。集合$A_n=\{R\text{上的所有偶置换}\}$带上置换的乘积运算称为偶置换群，也称交错群。

1.4 Lie 对称性

Lie 最早是受到 Galois 理论的影响，他在求解微分方程的时候，利用微分几何法和摄影几何法建立起了一种变换，能够将空间直线簇和球面一一对应，并且这种对应具有连续性，能表示出微分方程的解来。因此 Lie 引入了一般连续群（后称为李群）的概念，还创立了李代数，一种由无穷小变换构成的代数结构。

定义 1. 12. 一个具有C^r微分结构的拓扑空间称为r阶的或C^r的微分流形。[5]

定义 1. 13. 集合G被称为n维C^r $(r\geq 2)$李群，如果

（1）G是群；

（2）G是n维C^r微分流形；

（3）群的乘法$(x,y)\to xy$，$x,y\in G$是$G\times G\to G$的C^r映射。

一般假设$r=\infty$，并简称为李群。

定义 1. 14. 李代数表示向量空间g中的元素存在一种双线性运算：

$$[\cdot,\cdot]:g\times g\to g$$

且对任意$U,V,W\in g$，满足：

（1）双线性：$[aU+bV,W]=a[U,W]+b[V,W]$，$[U,\ aV+bW]=a[U,V]+b[U,W]$

其中a,b为常数；

（2）反对称性：$[U,V]=-[V,U]$；

（3）Jacobi 恒等式：$[U,[V,W]]+[V,[W,U]]+[W,[U,V]]=0$。

定义 1.15. 李群G称为微分流形M上的李变换群，如果

（1）G中的任一元素a都决定M上的一个变换，即$a:M\to M$为微分同胚；

（2）映射 $G\times M\to M$，$(a,x)\mapsto xa$是C^∞的，其中$a\in G$，$x\in M$；

（3）对于任意$a,b\in G,x\in M$，有$x(ab)=(xa)b$。

李变换群的引入，使得许多难以求解的微分方程转而可以通过寻找关于微分方程对称的决定方程组，从而获得相应的对称。对于一阶常微分方程，如果其接受由某个无穷小变换所确定的变换群，那么这个微分方程的解就可由积分式表达。下面我们来看一个微分方程的例子：

（1.4） $$\frac{dy}{dx}=\frac{ax^2+by^2}{cx^2+dy^2}$$ ，其中a,b,c,d为常数

如果对变量进行拉伸$x\mapsto\lambda x$，$y\mapsto\lambda y$，$\lambda>0$，可知（1.4）式仍然不变。因此我们可以引入一个拉伸变量：$w=\frac{y}{x}$，满足 $xw'=\frac{a+bw^2}{c+dw^2}-w$，通过分离变量即可求解。方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+p}{cx+dy+q}$ 具有直线$ax+by+p=0$和$cx+dy+q=0$交点的拉伸对称性。Lie 的研究也进一步表明，求解带有复杂公式的微分方程只是一系列对称性下不变性的特殊实例而已。

第二章 两项重要理论

2.1 Galois 理论

定义 2.1. 如果群$H \subset$群G满足：

（1）$a \in H$与$b \in H$推出$ab \in H$；

（2）$a \in H$推出$a^{-1} \in H$；

（3）$a \in H$与$c \in G$推出$cac^{-1} \in H$，

则H称为G的正规子群。

给定特征为 0 的域F和没有重根的F上的一元n次多项式$f(x)$。

定义 2.2. $f(x)$的所有根之间的一个置换g保持所有根之间的所有关系生成的集合不变，则置换g称为$f(x)$的一个 Galois 对称。$f(x)$的所有 Galois 对称组成的集合带上置换的乘法称为$f(x)$的 Galois 群，记作$Gal(f(x))$。

注记 2.3. $Gal(f(x))$是S_n的一个子群，如果没有特殊关系，则$Gal(f(x)) = S_n$。

定理 2.4（Galois 定理）. $f(x)$的所有根能由F中的元素经过有限次四则运算和根式运算得到的充分必要条件是$f(x)$的 Galois 群G有一个子群套：

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \cdots \supset G_t$$

满足：

（1）每个G_{j+1}是G_j的正规子群；

（2）每个$\dfrac{|G_j|}{|G_{j+1}|}$是素数；

（3）最后的G_t是交换群。

如果一个群G有一个子群套满足上述条件，那么G称为可解的。这一点可以应用在求解代数方程上，代数方程有根式解的充分必要条件是其 Galois 群为可解群。我们已经知道一元四次及以下代数方程是有根式解的，而五次以上代数方

程没有根式解，这是因为一元五次方程的 Galois 群 S_5 是非交换群，它有一个素商正规子群 A_5，而 A_5 没有任何素商正规子群，它的正规子群只有 $\{1\}$ 和自身。由 Galois 定理可知，一元五次方程的所有根不能由它的系数、有理数经过有限次四则运算和根式运算得到。

2.2 Noether 定理

Noether 定理是奇异积分方程的基本定理，这一定理揭示了系统的对称性与物理量的守恒性之间存在着密切联系，也就是连续对称性与守恒定律相互对应，例如系统的空间平移对称性说明系统动量守恒，系统的时间平移对称性说明系统能量守恒。物理学上把这种对称性与守恒性之间的联系称为 Noether 定理。而在微积分的变分运算下，大多数的“自然”微分方程都可以通过 Euler-Lagrange 方程的形式呈现，利用变分法来制定基本方程也就成为了共识。[6] Noether 定理指出，变分问题的对称不变性蕴含着守恒定律。

定义 2.5. 设泛函 $S=\int_{x_1}^{x_2} L(f(x),f'(x),x)\,dx$，$S$ 取到极值时的函数记作 $g(x)$，则 Euler-Lagrange 方程为

（2.1）
$$\frac{\partial L}{\partial g}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial g'}=0.$$

考虑振动弦 $\Omega=\{a<x<b\}$ 上的波动方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}$，其中 c 为声速，边界条件为 $u(a,t)=u(b,t)=0$，$t\geq 0$。假设 $c=1$，观察到波动方程其实是泛函 $J[u]$ 的 Euler-Lagrange 方程。

（2.2）
$$J[u]=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\alpha}^{\beta}\left(u_t{}^2-u_x{}^2\right)dxdt$$

事实上，如果我们做变量替换 $\tilde{t}=t+\varepsilon$，由于被积函数并不明确包含 t，泛函 J 是不变的，因此 $\left.\frac{dJ[u]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$。另做变量替换 $\tilde{x}=x$，$\tilde{u}=u$，则有 $J[\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t};\varepsilon)]=J[u(x,t)]$，由不变性同样有 $\left.\frac{dJ[\tilde{u}]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$。于是

（2.3） $$0=\frac{dJ[\tilde{u}]}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta+\varepsilon}\left[u_{\tilde{t}}\left(x,\tilde{t}-\varepsilon\right)^{2}-u_{x}\left(x,\tilde{t}-\varepsilon\right)^{2}\right]dxd\tilde{t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_{t}^{2}-u_{x}^{2}\right)dx\bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta}-\int_{\Omega}\int_{\alpha}^{\beta}\left(u_{t}u_{tt}-u_{x}u_{xt}\right)dxdt\,.$$

而 $u_{t}u_{tt}-u_{x}u_{xt}=\left(u_{t}^{2}\right)_{t}-\left(u_{x}u_{t}\right)_{x}-\left(u_{tt}-u_{xx}\right)u_{t}=\left(u_{t}^{2}\right)_{t}-\left(u_{x}u_{t}\right)_{x}$，可知

（2.4） $$\int_{\Omega}\int_{\alpha}^{\beta}\left(u_{t}u_{tt}-u_{x}u_{xt}\right)dxdt=\int_{\Omega}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\left(u_{t}^{2}\right)_{t}-\left(u_{x}u_{t}\right)_{x}\right]dxdt=\int_{\Omega}u_{t}^{2}\,dx\bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta}+0$$

结合（2.3）和（2.4），我们有

$$0=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_{t}^{2}+u_{x}^{2}\right)dx\bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

因此，

（2.5） $$E(t):=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_{t}^{2}+u_{x}^{2}\right)dx\equiv\text{常数}$$

（2.5）即为能量守恒公式，它是关于时间t的一个常值函数，说明了系统关于时间的平移变换后，系统的能量仍然守恒。

第三章 对称性理论在方程中的应用

3.1 代数方程

3.1.1 一元多次方程

前面的 Golois 理论在求解代数方程的问题上已经指出，五次及以上方程没有根式解，下面我们讨论如何利用对称性去求一元三次方程和一元四次方程的根式解。

对于首一的一元三次方程 $x^3+px^2+rx+s=0$，通过平移变换 $x=t-\frac{p}{3}$ 可以简化为 $t^3+bt+c=0$。再用二元对称表达式 $t=u+v$ 作变换，得到

（3.1）
$$u^3+v^3+c+(u+v)(3uv+b)=0$$

观察到（3.1）式是对称的，不妨令

（3.2）
$$\begin{cases} u^3+v^3+c=0 \\ 3uv+b=0 \end{cases}$$

得到二次方程

（3.3）
$$z^2+cz+\left(-\frac{b}{3}\right)^3=0$$

其中，$z=u^3$。求解（3.3）可得

（3.4）
$$z_1=-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2}$$
$$z_2=-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2}$$

对 t 取恰当分支，则

（3.5）
$$t_1=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$$
$$t_2=\omega\sqrt[3]{z_1}+\omega^2\sqrt[3]{z_2}$$
$$t_3=\omega^2\sqrt[3]{z_1}+\omega\sqrt[3]{z_2}$$

其中，$\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\omega^3=1$。

下面我们再从 Galois 理论的角度，来说明这种对称思想的可行性。[7]

设r_1，r_2，r_3是 $x^3+bx+c=0$ 的三个根，$Q(\sqrt{-3})$是有理数与$\sqrt{-3}$通过有限次数四则运算得到的所有复数的集合，构造根的两个表达式如下：

（3.6） $L_1=(r_1+r_2\omega+r_3\omega^2)^3$，$L_2=(r_1+r_2\omega^2+r_3\omega^4)^3=(r_1+r_2\omega^2+r_3\omega)^3$

作(r_1,r_2)对换，

$$L_1'=(r_2+r_1\omega+r_3\omega^2)^3=[\omega(r_1+r_2\omega^2+r_3\omega)]^3=L_2$$

$$L_2'=(r_2+r_1\omega^2+r_3\omega)^3=[\omega^2(r_1+r_2\omega+r_3\omega^2)]^3=L_1$$

因此，$(y-L_1)(y-L_2)$在对换(r_1,r_2)的作用下保持不变，同理，在对换(r_1,r_3)的作用下也保持不变，这说明了$(y-L_1)(y-L_2)$中y的系数都是r_1，r_2，r_3的对称多项式，其系数在$Q(\sqrt{-3})$中。所以它的两个根$y_1=L_1$，$y_2=L_2$可由b，c和有理数经过有限次四则运算和根式运算得到。

由（3.6）以及根与系数的关系，可以得到关于三个根r_1，r_2，r_3的线性方程组：

（3.7）
$$\begin{cases} r_1+r_2\omega+r_3\omega^2=\sqrt[3]{y_1} \\ r_1+r_2\omega^2+r_3\omega=\sqrt[3]{y_2} \\ r_1+r_2+r_3=0 \end{cases}$$

根据 $1+\omega+\omega^2=0$，解（3.7）可得：

（3.8）
$$\begin{aligned} r_1&=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}\right) \\ r_2&=\frac{1}{3}\left(\omega^2\sqrt[3]{y_1}+\omega\sqrt[3]{y_2}\right) \\ r_3&=\frac{1}{3}\left(\omega\sqrt[3]{y_1}+\omega^2\sqrt[3]{y_2}\right) \end{aligned}$$

对于首一的一元三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$，其 Galois 群是：

$$\mathrm{Gal}(x^3+ax^2+bx+c)=S_3$$

S_3是非交换群，它有一个素商正规子群A_3（$\frac{|S_3|}{|A_3|}=2$是素数），

$$A_3=\{1,(1,2)(1,3),(1,3)(1,2)\}$$

A_3是一个交换群，根据 Galois 定理可知，首一的一元三次方程的所有根可以由它的系数、有理数经过有限次四则运算和根式运算得到。

对于首一的一元四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$，通过平移变换同样有

$$x^4+bx^2+cx+d=0$$

当$c=0$，作$t=x^2$可将方程化为一元二次方程；

当$c\neq 0$，$x^4+bx^2+cx+d=(x^2+px+j)(x^2-px+k)$，另作$y=j+k$，可得

（3.9） $$y^3-by^2-4dy+(4bd-c^2)=0$$

这样一来，求解一元四次方程就变成了求解一个一元三次方程和两个一元二次方程。值得注意的是，S_4的素商正规子群A_4并不是交换群，但我们可以找到A_4的一个素商正规子群$V=\{1,(1,2)(3,4),(1,4)(2,3),(1,3)(2,4)\}$，从而由 Galois 定理得知，首一的一元四次方程的所有根可以由它的系数、有理数经过有限次四则运算和根式运算得到。

3.1.2 不定方程

不定方程指的是未知数的个数大于方程的个数，且未知数受到某种限制（如要求整数、正整数或有理数等）的方程或方程组，本节我们主要讨论数论中比较经典的例子，Pell 方程。

定义 3.1： 设d是正整数，且不是完全平方数，则 $x^2-dy^2=1$ 称为 Pell 方程，其中，x和y均为正整数。

注记 3.2： Pell 方程一定有无穷多组正整数解。[8]

考虑 Pell 方程，

（3.10）
$$x^2-2y^2=1$$

记 $X:=(x,y)$ 和 $Q(X):=x^2-2y^2$，对变量 X 作线性变换如下：

$$R:(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy)$$

我们希望的是找到这些自同构 R 使得它们能够确保 $Q(X)$ 的对称性，亦即 $Q(RX)=Q(X)$。于是有，

$$Q(RX)=(ax+by)^2-2(cx+dy)^2=(a^2-2c^2)x^2+2(ab-2cd)xy+(b^2-2d^2)y^2=Q(X)$$

对比 $Q(X)$ 的表达式，我们可以得到，

（3.11）
$$\begin{cases}a^2-2c^2=1\\ab-2cd=0\\b^2-2d^2=-2\end{cases}$$

其中（3.11）的第一个式子和（3.10）是一样的，如果我们假设这个式子成立，则 $d=\pm a$，$b=\pm 2c$。这说明如果我们能够找到（3.10）的一组特解，那么就可以借由变换阵 $R=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 一直找到其他的解。

例如，$X_1=(3,2)$ 显然是(3.10)的一组特解，其变换阵 $R=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$，$\det(R)=1$，则 $X_2=RX_1=(17,12)$，$X_3=RX_2=(99,70)$ 同样也是（3.10）的解。

对于双曲线 $x^2-2y^2=1$，设其右分支为 $\Gamma(x>0)$，Γ 上两点 $V_1:=(x_1,y_1)$ 在 $V_2:=(x_2,y_2)$ 的下面当且仅当 $y_1<y_2$，记作 $V_1\prec V_2$。则映射 R 具有如下两条几何性质：

（1）R 保分支：$V\in\Gamma\Rightarrow RV\in\Gamma$；

（2）R 保序：$V_1\prec V_2\Rightarrow RV_1\prec RV_2$。

由于 R 是自同构，显然 R^{-1} 也具有上述两条性质。

记（3.10）的平凡解为 $X_0:=(1,0)$，另设 $X_k:=(x_k,y_k)=RX_{k-1}=R^kX_0$，$X_k$ 即为（3.10）的所有正整数解，$k\geq1$，$k\in Z$，由保序性可知，这些解互不相同，

且有 $X_k \prec X_{k-1}$。下面我们用反证法来说明 X_k 涵盖了所有正整数解。

假设存在一个正整数解 M，使得 $X_k \prec M \prec X_{k+1}$，不等式左右两边同乘 R^{-1}，并注意到 R^{-1} 具有保序性，有

$$X_{k-1} = R^{-1}X_k \prec R^{-1}M \prec R^{-1}X_{k+1} = X_k$$

如此往复可以得到

$$X_0 = R^{-k}X_k \prec R^{-k}M \prec R^{-k}X_{k+1} = X_1$$

然而 $X_0 := (1,0)$ 和 $X_1 = (3,2)$ 显然不可能存在别的正整数解，假设矛盾。

对于矩阵 R^k 的计算，作对角化 $R^k = S\Lambda^k S^{-1}$，其中 Λ 是特征根为 $3\pm2\sqrt{2}$ 的对角阵，S 是列向量为 $\left(\pm\sqrt{2},1\right)$ 的矩阵，于是

$$X_k = \left(\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^k + \left(3-2\sqrt{2}\right)^k}{2}, \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^k - \left(3-2\sqrt{2}\right)^k}{2\sqrt{2}}\right) \tag{3.12}$$

3.1.3 矩阵方程

本节我们介绍矩阵问题中比较经典的“Markov 链”。图 1 的模型表示五个相同的房间和八扇门，门每隔一小时打开一次，必须从当前房间移动到另一相邻房间，假设移动到任一房间的概率相等。

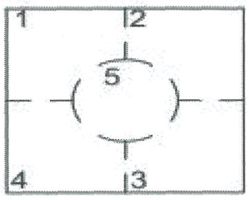

图 1 五房模型

引入转移矩阵 $M = \left(m_{ij}\right)$，m_{ij} 表示从房间 j 移动到房间 i 的概率，并设每一列的概率向量为 $P = \left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\right)$，则 $0 \le p_j \le 1$，$\sum p_j = 1$，$j = 1,\cdots,5$

（3.13）
$$M=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{4}\\ 0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$$

例如，$P_0=(1,0,0,0,0)$，则 $P_1=\left(0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=MP_0$，$P_k=MP_{k-1}=M^kP_0$。

对于更一般的 Markov 过程，设 λ 是伴随阵 M^* 的特征根，$v:=(v_1,\cdots,v_n)$ 是对应的特征向量，排除一维特征空间（$\lambda=1$）的情况，则 $|\lambda|<1$。我们需要的是找到一个不依赖于初始概率向量 P_0 的平衡向量 P，使得 P_k 收敛于 P，

$$P=\lim_{k\to\infty}M^{k+1}P_0=\lim_{k\to\infty}MM^kP_0=MP$$

这说明 P 是 M 关于特征值为 1 的特征向量。

不过平衡向量 P 并不是一定存在的，例如 $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 和 $M=I$。它存在的充要条件是 M 或者 M 的某个幂次方中的所有元素都是正数。

下面我们利用对称性的思想来求解 $P=MP$。回到五房模型，由于四个角落上的房间都是对等的，M 必然与交换角落房间的概率矩阵 T_{ij} 可交换，$1\le i,j\le 4$。于是，$M(T_{ij}P)=T_{ij}MP=T_{ij}P$，观察到 $T_{ij}P$ 也是 M 关于特征值为 1 的特征向量，因此由特征向量的唯一性，有 $T_{ij}P=P$，根据对称性可设 $P=(x,x,x,x,y)$，其中，$4x+y=1$。再由 $P=MP$，以第一行为例，$x=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y$，$4x=3y$，联立可解得 $x=\frac{3}{16}$，$y=\frac{1}{4}$。也就是说，五房模型最终会趋于一个稳定状态，有 $\frac{1}{4}$ 的概率会进入到中心房间，有 $\frac{3}{16}$ 的概率会进入到角落房间。

3.2 微分方程

在常微分方程的求解中，比较常用的是奇偶对称性和平移不变性。

考虑常微分方程，

（3.14） $$-y''(x)+V(x)\cdot y(x)=Ey(x)$$

的有界解，其中，$V(x)$是周期函数，基本周期为a，E为参数。显然在平移算子T_α的作用下，方程（3.14）的形式保持不变。考虑到方程的齐次性，于是存在具有平移对称性的特解，即

（3.15） $$T_\alpha y(x)=y(x+\alpha)=\lambda y(x)$$

由此可得

（3.16） $$y(x\pm n\alpha)=\lambda^{\pm n}y(x)$$

若$|\lambda|\neq 1$，当n趋向于无穷大的时候，（3.16）发散于无穷大或者无穷小。为了得到有界解，令$|\lambda|=1$，并将λ记作复指数函数形式$\lambda=e^{iK\alpha}$，其中$-\dfrac{\pi}{\alpha}<K\leq\dfrac{\pi}{\alpha}$。

另设$y(x)=e^{iKx}u(x)$，代入（3.15）可得

$$e^{iK\alpha}e^{iKx}u(x+\alpha)=e^{iK\alpha}e^{iKx}u(x)$$

即

（3.17） $$u(x+\alpha)=u(x)$$

在物理学上，（3.17）就是布洛赫定理的一维形式，它表明了周期场中波函数的组成方式。

在偏微分方程的求解中，泛定方程和定解条件往往会具有球对称性、轴对称性、转动对称性或者交换对称性，球对称性的存在使得可以通过变量替换的方式简化方程或者减少自变量，轴对称性实际上就是反对称的三维延伸，转动对称性则可以引入转动算子获得约化方程。

对于交换对称性，考虑一维二粒子问题

（3.18） $$-\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)u+V(x_1,x_2)u=Eu$$

如果$V(x_1,x_2)$具有交换对称性，则$V(x_1,x_2)=V(x_2,x_1)$，则方程（3.18）整体也具有交换对称性，其解也具有交换对称性，即

（3.19）
$$u(x_2,x_1)=\lambda u(x_1,x_2)$$

对（3.19）再做一次交换可得

（3.20）
$$u(x_1,x_2)=\lambda^2 u(x_1,x_2)$$

解得$\lambda=\pm1$，分别两组对应特解如下

（3.21）
$$\begin{aligned} y_1(x_2,x_1)&=+y_1(x_1,x_2)\\ y_2(x_2,x_1)&=-y_2(x_1,x_2) \end{aligned}$$

其中一个是关于交换的对称函数，而另一个是反对称函数。在量子力学当中，（3.21）分别表示全同玻色子系统和全同费米子系统。

总结

对称性在解方程上确实有着非常多重要的作用，而 Galois 理论和 Noether 定理，又赋予了对称性更深的理解，并将对称性引申至群论的领域，解决了许多带有复杂偏微分方程的数学物理问题。事实上，还有很多利用对称群去求解微分方程的新方法是本文没有涉及到的，例如构造单参数变换群去求解非线性高阶偏微分方程，用对称群去求解带有变分结构的偏微分方程，都是非常具有挑战性的。另外，通过编程来用数值分析的思想去求解蕴含对称性条件但不含显性解的方程，也是一项值得讨论的课题。

参考文献

[1] 倪志祥.数学物理方法[M].安徽：中国科技大学出版社,2012:240-265.

[2] Jerry L.Kazdan.Solving Equation:An Elegant Legacy[J].Amer.Math.Monthly,1998(105):1-21.

[3] 范后宏.数学思想要义[M].北京：北京大学出版社,2018:86-108.

[4] 邓明立.置换群概念的历史演变（1770-1846）[J]. 自然辩证法研究,1995(01):14-19+28.

[5] 田红霞.李对称分析法在几类偏微分方程求解中的应用[D].太原理工大学,2017.

[6] 马草川.具有变分结构偏微分方程的对称群与变分恒等式[D].西北大学,2008.

[7] 李焯章.从三次、四次方程求根公式到 Galois 理论[J].教学与研究,1984(Z1):25-28.

[8] Michael J.Jacobson,Hugh C.Williams.Solving the Pell equation[M].New York:Springer,2009.

致谢

首先对给予我论文指导与帮助的朱一飞老师表示最诚挚的感谢，虽然朱老师并不是我本科阶段的学术导师，但是在我找到他并提出希望能够指导我论文写作的时候，朱老师毫不犹豫地答应了，不管是论文的开题、相关参考材料的提供、Tex 模板的提供、论文的修改与答辩，都带来了莫大的帮助。其次我要感谢南科大这个优秀的平台，为我提供了良好的学习资源和学习环境，南科大的所有同学都非常乐于助人，共同在学习问题上互相讨论、互相进步。最后感谢百忙当中递交和审阅的数学系老师们。