硕士学位论文

拓扑向量丛代数化的阻碍与 Steenrod 运算

OBSTRUCTIONS TO ALGEBRAIZING TOPOLOGICAL VECTOR BUNDLES AND STEENROD OPERATIONS

研　　究　　生：张千一

指　导　教　师：朱一飞助理教授

南方科技大学

二〇二六年五月

国内图书分类号：XXxxx.x 学校代码：14325
国际图书分类号：xx-x 密级：公开

理学硕士学位论文

拓扑向量丛代数化的阻碍与 Steenrod 运算

学 位 申 请 人：张千一
指 导 教 师：朱一飞助理教授
学 科 名 称：数学
答 辩 日 期：2026 年 5 月
培 养 单 位：数学系
学位授予单位：南方科技大学

OBSTRUCTIONS TO ALGEBRAIZING TOPOLOGICAL VECTOR BUNDLES AND STEENROD OPERATIONS

A dissertation submitted to
Southern University of Science and Technology
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Science
in
Mathematics

by
Zhang Qianyi

Supervisor: Assistant Prof. Yifei Zhu

May, 2026

学位论文公开评阅人和答辩委员会名单

公开评阅人名单

无（全隐名评阅）

答辩委员会名单

主席	胡勇	副教授	南方科技大学
委员	胡晓文	副教授	大湾区大学
	李展	副教授	南方科技大学
秘书	王甫东	博后	南方科技大学

摘 要

本文主要围绕幂运算及 Steenrod 运算展开, 以拓扑向量丛代数化问题的最新进展为导向, 介绍了自上世纪五十年代以来 Steenrod 运算的发展情况, 穿插有拓扑 K 理论上幂运算相关内容. 文章主要分为理论与应用两个部分. 理论部分是对经典版本和代数几何版本 Steenrod 运算构造及性质的回顾, 除此之外还包含有对拓扑 K 理论上幂运算及 Adams 运算的构造、性质和关系的介绍. 应用部分则主要介绍周群上 Steenrod 运算在拓扑向量丛代数化问题上的应用.

理论部分是本文的第二章至第四章. 第二章沿着 Steenrod 和 Epstein 的思路介绍了经典上同调理论上 Steenrod 运算的构造和性质. 第三章在介绍拓扑 K 理论的相关背景和幂运算后, 借由对称群表示环与运算的对应关系构造出拓扑 K 理论上的经典运算（如 Adams 运算等）并给出运算间的显式关系. 第四章则详细描述了 Brosnan 对周群上 Steenrod 运算的构造及其主要性质.

应用部分是本文的第五章, 主要介绍周群上 Steenrod 运算在拓扑向量丛代数化问题上的应用. 第五章首先介绍了这一问题的历史背景及研究现状. 简单来说, 该问题主要研究复系数多项式环商环上的有限生成投射模与复数域上的仿射代数簇上的拓扑向量丛之间的对应关系. 这个问题的三维及以下版本在上世纪七八十年代就得到了解决:Kumar、Murthy 和 Swan 证明了三维及以下的拓扑向量丛可被代数化等价于其具备代数陈类. 但该问题的四维及以上版本始终未有进展, 直到 2019 年. 本文在第五章阐述了 2019 年 Asok, Fasel 和 Hopkins 利用周群上的 Steenrod 运算描述的四维二秩拓扑向量丛可代数化的充要条件, 并给了一个具备代数陈类但不可代数化的拓扑向量丛的例子.

关键词：上同调理论；幂运算；Steenrod 运算；拓扑向量丛代数化；周群

目 录

第 1 章 简介

代数拓扑的一个重要任务就是通过构造合适的不变量来刻画研究对象的性质和差异. 对于拓扑空间、向量丛以及代数簇而言, 普通同调、上同调理论、拓扑 K 理论和周群都提供了基本而常用的代数工具. 它们一方面将几何问题转化为代数问题, 另一方面也为计算和分类工作提供了实际帮助. 然而, 随着研究的不断深入, 单纯依靠上同调理论本身已无法满足实际工作的需要. 要想探测对象间更精细的差异, 还需要引入上同调的运算结构. 正是在这样的背景下, 幂运算和 Steenrod 运算相关理论开始出现并逐渐完善, 由此推动了代数拓扑和代数几何的进一步发展. 这一发展脉络将体现在本文的第二、三、四章. 周群上的 Steenrod 运算在拓扑向量丛代数化问题上的应用也将体现在本文的第五章.

从历史的角度来看, 本文第二章至第五章所讨论的内容大致对应于 20 世纪中叶以来几个不同阶段的数学成果.20 世纪 50 年代,Steenrod 与 Epstein 在经典上同调理论上系统性地构造了 Steenrod 运算与 Steenrod 代数, 发现了模 p 的经典上同调理论携带的丰富的运算信息[28].20 世纪 70 年代前后,Atiyah 和 Hirzebruch 借鉴 Grothendieck 在证明 Riemann-Roch 定理时构造的代数簇的 K 群概念, 发展了拓扑 K 理论和拓扑 K 理论上的幂运算, 这也是人们发现的第一个广义上同调理论. 进入 21 世纪后, 随着 motivic 上同调理论与 $\mathbb{A}^1$-同伦论的建立与成熟, 许多拓扑中已有的概念也被逐渐定义在了代数几何中.2003 年 Brosnan 受 Steenrod 和 Epstein 在经典情况下建立 Steenrod 运算思路的启发，在周群上构造了 Steenrod 运算, 使得 Steenrod 运算正式进入代数几何领域.2019 年,Asok、Fasel 与 Hopkins 运用了 Brosnan 在周群上建立的 Steenrod 运算, 刻画了四维二秩拓扑向量丛代数化的充要条件, 并首次给出具备代数陈类的不可代数化的拓扑向量丛的例子[7], 帮助人们更加深刻地理解拓扑向量丛代数化的阻碍, 也进一步体现了 Steenrod 运算在代数几何中的应用价值.

本文希望呈现的, 正是这样一条从 1950 到 2020, 由经典上同调理论出发, 经由拓扑 K 理论与周群, 最终落到拓扑向量丛代数化问题最新进展上的理论发展和应用实践的完整脉络. 具体到各章节的主要内容来说: 第二章从叉积的定义出发构造了经典上同调理论上的 Steenrod 运算和 Steenrod 代数, 并说明了它们满足的性质与结构, 辅以具备相同上同调环但并不同伦等价的拓扑空间例子的具体计算, 由此体现 Steenrod 运算能够更加精细地识别拓扑空间之间的差异. 第三章转向拓扑 K 理论上的幂运算, 先介了绍 Atiyah 和 Hirzebruch 发展的拓扑 K 理论. 然后我们在此基

础上定义出拓扑 K 理论上的幂运算, 并从对称群表示环诱导拓扑 K 理论上运算的角度出发, 说明了经典运算（如 Adams 运算等）和幂运算之间的显式联系. 最后我们从 λ-环的角度更加深刻地体现了拓扑 K 理论上 Adams 运算对 λ 运算的决定作用, 也为进一步理解各种上同调理论提供了更高的视角. 第四章则沿着 Brosnan 的思路说明周群上的 Steenrod 运算的构造和性质, 说明如何在代数几何的背景下构造拓扑中已有的概念, 这也与第二章经典上同调理论上的 Steenrod 运算的构造及性质的证明过程形成对比, 更加完整地体现了 Steenrod 运算的内涵. 第五章以拓扑向量丛代数化问题为中心, 考察了前述理论在这一问题中的具体应用, 并详细介绍了 Asok、Fasel 与 Hopkins 在 2019 年工作中关于该问题的最新进展. 其中, 拓扑向量丛代数化问题的具体背景及研究现状将在第五章第一节得到详细展示.

从文章结构上来说, 本文并不把第二、三、四章看作彼此平行、互不相关的背景知识, 而是试图突出它们之间的内在联系. 第二章与第四章分别讨论了经典上同调理论与周群上的 Steenrod 运算, 两者在构造思路上具有明显的呼应关系: 它们都详细体现了如何从较为原始的运算（如对角映射和叉积）出发, 逐步建立起满足 Cartan 公式与 Adem 关系的运算体系的过程. 通过对照阅读这两章, 可以更加清楚地看到经典拓扑内容是如何迁移和应用到现代代数几何体系中的. 与此同时, 对于详细讨论了拓扑 K 理论上幂运算的第三章, 虽然主要研究对象——幂运算及 Adams 运算看起来不同于 Steenrod 运算, 但第三章却并非本文可有可无的部分. 这一章体现了上同调理论、幂运算以及加性运算的内涵与共性. 通过介绍 λ-环结构, 使得前后几章中的不同运算能够被放在统一框架中加以理解, 帮助我们从更高的角度理解幂运算与加性运算的普遍性质及联系.

由此可见, 本文所讨论的第二章到第四章虽然产生于不同的年代与数学分支, 但它们却并非彼此孤立的零散片段, 而是紧紧围绕着 “如何借助幂运算提取数学对象更精细信息” 这一主题共同展开的不可分割的有机整体. 它们最终汇聚合力, 共同推动了代数拓扑、代数几何及其它数学分支的发展. 这一现象在本文中的体现就是第五章的周群上的 Steenrod 运算推动了拓扑向量丛代数化问题取得新的进展与突破.

总的来说, 本文试图说明: 幂运算及其相关代数结构并非分布于不同数学分支的不成体系的零散技巧, 而是一条跨越经典上同调理论、拓扑 K 理论和周理论的重要桥梁. 它们在不同问题背景和数学分支下以不同运算的形式出现, 但都服务于同一个目标, 即借助更精细结构来识别研究对象上携带的代数、几何和算术信息, 以更方便的探测来实现对复杂对象更深的理解与辨别. 本文依次介绍了经典上同调理论上的 Steenrod 运算、拓扑 K 理论上的幂运算以及周群上的 Steenrod 运算, 并最

终将这些内容汇聚到拓扑向量丛代数化问题的最新进展中, 希望借此呈现出一条清晰的理论发展与应用实践的路径, 以此体现代数拓扑与代数几何的紧密联系.

第 2 章　经典上同调理论上的 Steenrod 运算

这一章我们将围绕经典上同调理论上的 Steenrod 运算展开. 三个小节依次介绍它的构造、性质以及在它的基础上定义出的 Steenrod 代数的 Hopf 代数结构. 值得一提的是, 我们将在 2.2 节末尾通过 Steenrod 运算进行具体计算, 说明两个具有相同上同调环的拓扑空间并非同伦等价, 以此说明 Steenrod 运算能识别出拓扑空间的精确信息.

2.1　Steenrod 运算的构造

这一节中, 我们将从胞腔复形和笛卡尔积这类最基本的定义出发, 借由上同调环上的杯积、叉积, 定义出 Steenrod 运算.

设 K 是一个有限正则胞腔复形,K^n 是其 n 重笛卡尔积. 设 Σ_n 为 n 个元素的对称群, 它的作用是置换 K^n 各位置上的元素. 设 π 为 Σ_n 的一个子群,W 是一个 π-自由零调复形.$W \times K^H$ 通过对角映射的作用成为 π-自由复形.

令 L 为另一个有限正则胞腔复形. 设 $u \in H^*(K)$,$v \in H^*(L)$, 则有叉积 $u \times v \in H^*(K \times L)$. 若 $K = L$, 且 $d : K \to K \times K$ 为对角映射, 则定义杯积

$$u \cup v = d^*(u \times v).$$

这样定义出来的杯积也被称为内运算. 相应地, 叉积被称为外运算.

叉积的优点在于其定义不依赖于对角近似的选取, 即使在链层次上也是如此. 另一方面, 杯积需要对角逼近 $d_\# : K \to K \otimes K$. 过去在处理杯积时遇到的许多困难源于 $d_\#$ 的多种选取. 我们可以很容易地由对角映射及叉积的相应性质推导出杯积的性质, 如结合律和交换律等.

与" 由叉积（外运算）得到杯积（内运算）并由叉积性质得到杯积性质" 类似, 我们将外运算 P 在某种" 对角映射" 下的像定义为（内）约化幂运算, 并通过证明外运算的性质来证明（内）约化幂运算的性质.

设 $W \times_\pi K^n := (W \times K^n)/\pi$, 并令 j 为如下复合映射（这个复合映射是一个嵌入）

$$K^n \to W \times K^n \to W \times_\pi K^n.$$

映射 $W \times_\pi K^n \to W/\pi$ 是一个以 K^n 为纤维的纤维化. 给定 K 上的一个上同调类 u, 我们在 K^n 上有一个上同调类 $u \times \cdots \times u$. 在适当条件下, 我们可以以唯一的方式将

这个上同调类扩张为全空间 $W \times_\pi K^n$ 上的一个类 Pu, 使得 Pu 关于变量 K 的映射是自然的,$Po = 0$ 且

$$j^* Pu = u \times \cdots \times u.$$

对于杯积意义下的 n 次幂, 我们有

$$u^n = d^*(u \times \cdots \times u).$$

为了定义 n 次约化幂运算, 我们将 K^n 替换为 $W \times_\pi K^n$, 将 $u \times \cdots \times u$ 替换为 Pu, 并且将 $d : K \to K^n$ 替换为

$$1 \times_\pi d : W \times_\pi K \to W \times_\pi K^n.$$

现在 $W \times_\pi K = W/\pi \times K$. 因此

$$(1 \times_\pi d)^* Pu \in H^n(W/\pi \times K).$$

如果我们考虑的都是域系数的上同调的话, 那么就可以通过 Künneth 定理在 $H^n(W/\pi \times K)$ 中展开.$(1 \times_\pi d)^* Pu$ 展开式中 $H^n(K)$ 的系数即为 n 次约化幂运算.

令 K 是一个有限正则胞腔复形. 假设我们在 K 上给定了一个以阿贝尔群 G 为系数的 q-上闭链 u. 我们将 G 视为一个复形, 其所有分量 $G_r = 0$, 除了在零维时 $G_0 = G$. 那么我们有链映射 $u : K \to G$, 它将阶数降低 q. 按如下要求定义 Σ_n-复形 $G^n(q)$: 它在非零维数为零, 在零维为 n 重张量积 G^n. 如果 q 是奇数, 我们令 $\alpha \in \Sigma_n$ 通过（-1）倍的 G^n 各分量因子的置换作用在 G^n 上. 如果 q 是偶数, 我们令 α 仅置换 G^n 各分量的因子而不改变正负号. 则 $u^n : K^n \to G^n(q)$ 是一个将阶数降低 nq 的等变链映射.

令 $\epsilon : W \to \mathbb{Z}$ 为 W 上的增广映射, 那么 $\epsilon \otimes 1 : W \otimes K^n \to K^n$ 就是一个等变链映射（这里要用到 $W \otimes K^n$ 上的对角作用）. 则复合映射

$$W \otimes K^n \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} K^n \xrightarrow{u^n} G^n(q)$$

是一个将阶数降低 nq 的等变链映射. 换句话说, 我们在 $W \otimes K^n$ 上有一个等变 nq-上闭链, 记作

$$Pu \in C_\pi^{nq}(W \otimes K^n; G^n(q)).$$

现在我们要证明, 当 u 由一个上同调类作用而变化时, 相应地, Pu 也由一个等变上同调类作用而变化.

引理 2.1： 存在一个等变映射 $h : I \otimes W \to I^n \otimes W$, 使得对所有 $w \in W$, 有 $h(\bar{0} \otimes w) = \bar{0}^n \otimes w$ 且 $h(\bar{1} \otimes w) = \bar{1}^n \otimes w$.

证明： h 在 $\delta \otimes W$ 和 $\bar{1} \otimes W$ 上是等变的. 我们有等变零调承载子 $W \otimes I^n$. 由

Steenrod-Epstein[28] 第五章 2.2 直接得. ■

引理 2.2： 如果上闭链 u 和 v 都在 K 上某个 G 系数上同调类里, 那么 Pu 和 Pv 也都在 $C_\pi^*(W\otimes K^n; G^n(q))$ 中的某个上同调类里.

证明： u 与 v 在同一个上同调类意味着存在从 u 到 v 的链同伦, 即一个链映射 $D: I\otimes K\to G$ 降低 q 阶, 使得对所有 $\tau\in K$, 有 $D(0\otimes\tau)=u(\tau)$ 和 $D(T\otimes\tau)=v(\tau)$.

由引理 2.1, 我们有以下等变链映射的复合:

$$I\otimes W\otimes K^n \xrightarrow{h\otimes 1} I^n\otimes W\otimes K^n \xrightarrow{1\otimes\epsilon\otimes 1} I^n\otimes K^n \xrightarrow{\text{shuf}} (I\otimes K)^n \xrightarrow{D^n} G^n(q).$$

这个复合给出了从 Pu 到 Pv 的等变同伦, 从而得证. ■

这个引理也告诉我们: P 诱导了一个映射（一般不是同态）

$$P: H^q(K;G)\to H^{nq}(W\otimes K^n; G^n(q)).$$

设 w 是 W 的一个零维胞腔. 我们有一个由 $j(x):=w\otimes x$ 定义的映射 $j: K^n\to W\otimes K^n$. 设 L 为另一个有限正则胞腔复形, $f: K\to L$ 是一个连续映射, 那么等变连续映射 $f^n: K^n\to L^n$ 诱导出:

$$(f^n)^*: H_\pi^*(W\times L^n; G^n(q))\to H_\pi^*(W\times K^n; G^n(q)).$$

引理 2.3： (1) j^*Pu 是 n 重叉积 $u\times\cdots\times u\in H^{nq}(K^n;G^n)$.

(2) 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^q(L;G) & \xrightarrow{P} & H_\pi^{nq}(W\times L^n; G^n(q)) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle (f^n)^*} \\ H^q(K;G) & \xrightarrow[P]{} & H_\pi^{nq}(W\times K^n; G^n(q)) \end{array}$$

证明： (1) 由 P 和叉积的定义直接可得.

(2) 由 Steenrod-Epstein[28] 第五章的 3.1 和 3.3 可以将证明化归到 f 是真（proper）映射的情形. 令 C 为 f 的极小承载子. 那么从 K^n 到 L^n 的把 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ 打到 $C(\sigma_1)\times\cdots\times C(\sigma_n)$ 的承载子是 f^n 的一个零调等变承载子. 因此, 如果 $f_\#: K\to L$ 是 f 的一个链逼近, 那么我们可以把 $1\otimes(f_\#)^n$ 当做从 $W\otimes K^n\to W\otimes L^n$ 的等变映射. 于是我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} W\otimes K^n & \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} & K^n & \xrightarrow{(f^\#)^n} & G^n(q) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes(f_\#)^n} & & \downarrow{\scriptstyle (f_\#)^n} & & \downarrow{\scriptstyle Id_{G^n(q)}} \\ W\otimes L^n & \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} & L^n & \xrightarrow{u^n} & G^n(q) \end{array}$$

由此得证该引理. ■

注释 2.1： 设 $n=p, G=\mathbb{Z}_p$, 且 π 是 Σ_p 中置换 K^p 因子的循环子群, 则 P 由引理 2.3 中描述的性质以及 $P_0=0$ 这一事实所刻画.

设 $\pi\subset\rho\subset\Sigma_n$, 并令 V 和 W 分别为 ρ-自由零调复形和 π-自由零调复形.

引理 2.4： 下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & H_\pi^{nq}(W\times K^n;G^n(q)) \\
H^q(K;G) \arrow[ur, "P"] \arrow[dr, "P"'] & \\
 & H_\rho^{nq}(V\times K^n;G^n(q)) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

其中右边的映射由 Steenrod-Epstein[28] 第五章 3.3 诱导. 由此可知 P 与 W 的选取无关.

证明： 设 $g_\#: W\to V$ 为等变链映射. 下图交换

$$\begin{tikzcd}
W\otimes K^n \arrow[dd, "g_\#\otimes 1"'] \arrow[dr, "\epsilon\otimes 1"] & & \\
 & K^n \arrow[r, "u^n"] & G^n(q) \\
V\otimes K^n \arrow[ur, "\epsilon\otimes 1"'] & &
\end{tikzcd}$$

由此得证引理. ∎

设 $u\in H^q(K;G), v\in H^r(L;F)$, 其中 K 和 L 是有限正则胞腔复形,G 和 F 是阿贝尔群. 我们有 $Pu\in H_\pi^{nq}(W\times K^n;G^n(q))$ 和 $Pv\in H_\pi^{nr}(W\times L^n;F^n(r))$. 有叉积

$$Pu\times Pv\in H_{\pi\times\pi}^{nq+nr}(W\times W\times K^n\times L^n;G^n(q)\otimes F^n(r))$$

其中 $\pi\times\pi$ 按以下方式作用在 $W\times W\times K^n\times L^n$ 上:

$$(\alpha,\beta)(v_1,v_2,x,y)=(\alpha v_1,\beta v_2,\alpha x,\beta y)\quad (\alpha,\beta\in\pi, v_1,v_2\in W, x\in K^n, y\in L^n).$$

又有

$$u\times v\in H^{q+r}(K\times L;G\otimes F),$$

$$P(u\times v)\in H_\pi^{n(q+r)}(V\times(K\times L)^n;(G\otimes F)^n(q+r)).$$

其中 V 是 π-自由零调复形.

接下来我们要用到一个三元映射

$$\lambda:(\pi,(G\otimes F)^n(q+r),(K\times L)^n)\to(\pi\times\pi,G^n(q)\otimes F^n(r),K^n\times L^n)$$

其中:$\lambda_1: \pi \to \pi \times \pi$ 为对角映射, 即对于任意 $\alpha \in \pi, \lambda_1(\alpha) = (\alpha, \alpha)$；

$$\lambda_2: (G \otimes F)^n(q+r) \to G^n(q) \otimes F^n(r)$$

是洗牌 (shuffle) 映射, 它重排了两组 n 元变量, 因此它是同构,；映射 $(K \times L)^n \to K^n \times L^n$ 将两组 n 元变量重排. 我们有映射

$$\lambda^*: H^*_{\pi\times\pi}(W \times W \times K^n \times L^n; G^n(q) \otimes F^n(r)) \to H^*_\pi(V \times (K \times L)^n; (G \otimes F)^n(q+r))$$

引理 2.5：$\lambda^*(Pu \times Pv) = (-1)^{n(n-1)qr/2} P(u \times v)$.

证明：取 V 为任意 π-自由零调复形. 令 $V = W \times W$. 则我们有等变链映射的交换图:

$$\begin{tikzcd}
(W \otimes W) \otimes (K \otimes L)^n \arrow[r, "1\otimes\lambda_\#"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"'] & W \otimes W \otimes K^n \otimes L^n \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1\otimes 1"] \\
(K \otimes L)^n \arrow[r, "\lambda_\#"] \arrow[d, "(u\otimes v)^n"'] & K^n \otimes L^n \arrow[d, "u^n\otimes v^n"] \\
(G \otimes F)^n(q+r) \arrow[r, "\mu"] & G^n(q) \otimes F^n(r)
\end{tikzcd}$$

其中 μ 是 $(-1)^{n(n-1)rq/2}$ 乘以 λ_2 的逆. 图的左边给出 $P(u \times v)$, 右边给出 $Pu \times Pv$. 故引理得证. ■

现在令 n 等于素数 p, 并令 $G = \mathbb{Z}_p$. 则 $G^p(q)$ 作为阿贝尔群同构于 $\mathbb{Z}_p$. 若 q 为奇数, 则 Σ_p 通过由置换的奇偶性决定的的正负号作用作用在 $\mathbb{Z}_p \cong G^p(q)$ 上；若 q 为偶数, 则平凡地作用. 这里我们借鉴 Steenrod-Epstein[28] 的记号, 记 $G^p(q) = \mathbb{Z}_p^{(q)}$.

令 $\pi \subset \Sigma_p$ 为由置换 T 生成的 p 阶循环群, 它把 i 打到 $(i+1) \mod p$. 这个置换的符号为 $(-1)^{p-1}$. 由于 $(-1)^{p-1} \equiv 1 \mod p$, 因此 $\mathbb{Z}_p^{(q)}$ 是平凡 π-模.

引理 2.6：设 K 是不带 π-作用的有限正则胞腔复形. 则

$$H^*_\pi(W \times K; \mathbb{Z}_p) \cong H^*(W/\pi \times K; \mathbb{Z}_p),$$

且该同构对于 K 的映射来说是自然的.

设 $d: K \to K^p$ 为对角映射. 若 Σ_p 通过置换作用作用在 K^p 上, 那么 d 就是等变的. 我们有诱导出来的映射:

$$d^*: H^*_\pi(W \times K^p, \mathbb{Z}_p^{(q)}) \to H^*_\pi(W \times K; \mathbb{Z}_p^{(q)}).$$

由于 $\mathbb{Z}_p^{(q)}$ 是平凡 π-模, 我们可以把 $\mathbb{Z}_p^{(q)}$ 替换为 $\mathbb{Z}_p$. 所以, 如果 $u \in H^q(K; \mathbb{Z}_p)$, 那么我们由 Kunneth 公式就可得到.

定义 2.1：$d^*Pu = \sum_k w_k \times D_k u$ 其中 $w_k \in H^k(W/\pi; \mathbb{Z}_p)$ 是 Steenrod-Epstein[28] 第五章定理 5.2 中的元素, 且由此定义了

$$D_k : H^q(K;\mathbb{Z}_p) \to H^{pq-k}(K;\mathbb{Z}_p).$$

（注意我们尚未证明 D_k 是同态.）

设 $f : K \to L$ 是两个不带群作用的有限正则胞腔复形间的连续映射.

引理 2.7：对每个 k,$f^*D_k = D_k f^*$.

证明：我们有 $df = f^p d$. 由 $H_\pi^*(W \times K; A)$ 是反变函子可知下图交换

$$\begin{tikzcd} H_\pi^{pq}(W \times L^p;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, "(f^p)_*"] & H_\pi^{pq}(W \times L;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "f^*"] \\ H_\pi^{pq}(W \times K^p;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "d^*"'] & H_\pi^{pq}(W \times K;\mathbb{Z}_p) \end{tikzcd}$$

由此证得该引理. ■

引理 2.8：$D_0 u = u^p$.

证明：设 w 为 W 的一个零维胞腔, $d_\# : K \to K^p$ 为对角逼近. 我们有交换图

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "d_\#"] & W \otimes K \arrow[d, "1\otimes d_\#"] \\ K^p \arrow[r, "j"'] & W \otimes K^p \end{tikzcd}$$

其中 $jx = w \otimes x$. 于是

$$D_0 u = j^*(\Sigma_k w_k \times D_k u) = j^* d^* P u = d^* j^* P u = d^*(u \times \cdots \times u) = u^p.$$

■

引理 2.9：设 $u \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$ 且 $p > 2$. 若 q 为偶数, 则只有当对于某个自然数 m 有 $j = 2m(p-1)$ 或 $2m(p-1)-1$ 时 $D_j u$ 不为 0 . 若 q 为奇数, 则只有当对于某个自然数 m 有 $j = (2m+1)(p-1)$ 或 $(2m+1)(p-1)-1$ 时, $D_j u$ 不为 0 .

证明：设 γ^* 为 ρ 中元素 γ 诱导的 $H^*(W \times L;\mathbb{Z}_p(q))$ 的自同构, 其中 L 是 ρ 作用的有限正则胞腔复形. 令 V 为 ρ-自由零调复形. 我们有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & H_\rho^{pq}(V\times K^p;\mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[r,"d^*"] \arrow[dd] & H_\rho^{pq}(V\times K;\mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[r,"\gamma^*=1"] \arrow[dd] & H_\rho^{pq}(V\times K;\mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[dd] \\
H^q(K;\mathbb{Z}_p) \arrow[ur,"P"] \arrow[dr,"P"'] & & & \\
 & H_\pi^{pq}(W\times K^p;\mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[r,"d^*"'] & H_\pi^{pq}(W\times K;\mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[r,"\gamma^*"'] & H_\pi^{pq}(W\times K;\mathbb{Z}_p^{(q)})
\end{tikzcd}
$$

因此由 Steenrod-Epstein[28] 第五章可直接得到引理. ■

令 $d^*: H^*(W\times K^p;\mathbb{Z}_p)\to H^*(W\times K;\mathbb{Z}_p)$ 为由对角映射 $d: K\to K^p$ 诱导的映射.

引理 2.10：设 $\tau: H^*(W\otimes K^p;\mathbb{Z}_p)\to H_\pi^*(W\otimes K^p;\mathbb{Z}_p)$ 表示等变上同调理论中带有不同群作用的上同调群之间的转移 (transfer) 映射. 则 $d^*\tau=0$.

证明：我们有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & H^*(W\otimes K;\mathbb{Z}_p) \arrow[r,"\tau"] \arrow[d,"d^*"'] & H_\pi^*(W\otimes K;\mathbb{Z}_p) \arrow[d,"d^*"] \\
H^*(W\otimes K;\mathbb{Z}_p) \arrow[r,"i^*"] & H^*(W\otimes K;\mathbb{Z}_p) \arrow[r,"\tau"] & H_\pi^*(W\otimes K;\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}
$$

由于 W 是零调的且 $H_\pi^0(W;\mathbb{Z}_p)\to H^0(W;\mathbb{Z}_p)$ 是满射, 故 $i^*: H_\pi^n(W\otimes K;\mathbb{Z}_p)\to H^n(W\otimes K;\mathbb{Z}_p)$ 也是满射,$\tau i^*=0$. 引理得证. ■

引理 2.11：若 π 是循环置换群且 $P: H^q(K;\mathbb{Z}_p)\to H_\pi^{pq}(W\times K^p;\mathbb{Z}_p)$, 则 d^*P 是同态[27].

证明：设 u 和 v 为 K 上的 q-上闭链. 则 $P(u+v)-Pu-Pv$ 由链映射

$$W\otimes K^p \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} K^p \xrightarrow{(u+v)^p-u^p-v^p} \mathbb{Z}_p$$

给出. 根据引理 2.10, 只需证明此上闭链在转移的像中. 因为 $\epsilon\otimes 1$ 是等变映射, 所以我们只需证明 $(u+v)^p-u^p-v^p$ 在某个上闭链在

$$\tau: C^*(K^p;\mathbb{Z}_p)\to C_\pi^*(K^p;\mathbb{Z}_p)$$

下的像中.

而 $(u+v)^p-u^p-v^p$ 是所有包含 k 个因子 u 和 $p-k$ 个因子 v 的单项式之和, 其中 $1\leqslant k\leqslant p-1$.$\pi$ 自由地置换这些因子. 我们选取一组由单项式构成的基, 使得 π 的置换恰好把每个单项式各给出一次. 令 z 为基中的这些单项式的和. 则

$$\tau z=(u+v)^p-u^p-v^p.$$

因为每个单项式都是上闭链, 所以 z 是 K^p 中的上闭链. 引理得证. ■

推论 2.1：对于任意 k,$D_k: H^q(K;\mathbb{Z}_p)\to H^{pq-k}(K;\mathbb{Z}_p)$ 是同态.

引理 2.12：若 $u \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, 则当 $k > (p-1)q$ 时 $D_k u = 0$, 且 $D_{(p-1)q}u = a_q u$, 其中 $a_q \in \mathbb{Z}_p$ 是与 u 和 K 无关的常数.

证明：设 K^q 为 K 的 q-骨架. 则 $i^*: H^r(K) \to H^r(K^q)$ 在 $r < q$ 的情况下是单射. 由引理 2.3 , 我们可以假设 K 是 q 维的. 令 $u_0 \in H^q(S^q;\mathbb{Z}_p)$ 为对偶于 S^q 的上同调类. 存在映射 $f: K \to S^q$ 使得 $f^*u_0 = u$: 令 $f(K^{q-1})$ 为一点, 并将 K 的每个 q 维胞腔以由 v（u 的上闭链代表元）打到 S^q. 由引理 2.3 可取 $K = S^q$ 且 $u = u_0$. 于是得证引理的第二部分. 若 $k > (p-1)q$, 则 $D_k u$ 非零且 $k > (p-1)q$ 的唯一可能情况是 $k = pq$ 且 $q > 0$. 取 S^q 中的一点 s, 令 $j: s \to S^q$ 为到 S^q 的嵌入. 则 j^* 在零阶是同构, 且 $j^*u = 0$. 由引理 2.7 和推论 2.1 可得

$$j^*D_{pq}u = D_{pq}j^*u = D_{pq}0 = 0.$$

引理证毕. ■

引理 2.13：设 β 为与正合列

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

相关联的 Bockstein 运算, 则当自然数 p 大于 2 或 q 为偶数时, 有 $\beta d^* P u = 0$.

证明：由于 $\beta d^* = d^*\beta$, 引理 2.6 表明我们只需证明 $\beta P u$ 在转移的像中. 设 v 是 K 上代表 $u \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$ 的整系数上链. 则 $\delta v = pz$, 其中 z 是 $\beta u \in H^{q+1}(K;\mathbb{Z}_p)$ 的代表元. 上链 v^p 是 K^p 上的整系数上链, 其同调类记为 $\{v^p\} \in H_\pi^{pq}(K^p;\mathbb{Z}_p)$. 设 $\varepsilon \otimes 1: W \otimes K^p \to K^p$. 则

$$\beta P u = \beta(\varepsilon \otimes 1)^*(v^p) = (\varepsilon \otimes 1)^*\beta(v^p).$$

由于 τ 与 $(\varepsilon \otimes 1)^*$ 交换, 所以我们只需证明 $\beta(v^p)$ 在 τ 的像中. 因为 $p-1$ 或 q 为偶数, 所以有

$$\delta v^p = \sum_{s=0}^{p-1}(-1)^{qs}v^s(\delta v)v^{p-s-1}$$

$$= p\sum_{s=0}^{p-1}(-1)^{qs}v^s z v^{p-s-1}$$

$$= p\sum_{\alpha\in\pi}(-1)^{qs(p-1)}\alpha(zv^{p-1})$$

$$= p\tau(zv^{p-1}).$$

由于 v 是 $\mathbb{Z}_p$ 系数的上闭链,zv^{p-1} 是 $\mathbb{Z}_p$ 系数的上闭链. 上述论证表明 $\tau(zv^{p-1})$ 代表 $\beta(v^p)$, 故引理得证. ■

推论 2.2：若 $p > 2$ 或 $q = \dim u$ 为偶数, 则 $\beta D_0 u = 0, \beta D_{2k} u = D_{2k-1} u, \beta D_{2k-1} u = 0$.

证明：由定义 2.1 和引理 2.13 可知:

$$\beta(\Sigma_k w_k \times D_k u) = 0.$$

$\beta w_{2j} = 0$,$\beta w_{2j+1} = -w_{2j+2}$（$j \geqslant 0$）. 因此

$$\Sigma_{k\geqslant 0} w_{2k} \times \beta D_{2k} u - \Sigma_{k\geqslant 0} w_{2k+1} \times \beta D_{2k+1} u - \Sigma_{k\geqslant 1} w_{2k} \times D_{2k-1} u = 0.$$

比较 w_k 的系数即得此推论. ■

引理 2.14：设 $u \in H^r(K;\mathbb{Z}_p)$,$v \in H^s(L;\mathbb{Z}_p)$. 若 $p > 2$, 则

$$D_{2k}(u \times v) = (-1)^{p(p-1)rs/2} \sum_{j=0}^{k} D_{2j} u \times D_{2k-2j} v.$$

若 $p = 2$, 则 $D_k(u \times v) = \sum_{j=0}^{k} D_j u \times D_{k-j} v$.

证明：回顾在引理 2.6 中我们使用过的三元映射 λ, 有

$$\lambda : (\pi, \mathbb{Z}_p, (K \times L)^p) \to (\pi \times \pi, \mathbb{Z}_p, K^p \times L^p).$$

我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
(\pi, \mathbb{Z}_p, (K \times L)^p) \arrow[r, "\lambda"] & (\pi \times \pi, \mathbb{Z}_p, K^p \times L^p) \\
(\pi, \mathbb{Z}_p, K \times L) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "d_1"] & (\pi \times \pi, \mathbb{Z}_p, K \times L) \arrow[u, "d'"]
\end{tikzcd}$$

其中 d 由 $K \times L$ 上的对角映射诱导,d_1 由 π 上的对角映射诱导,d' 由 K 和 L 上的对角映射复合而成.

设 W 是 π-自由零调复形. 则 $W \times W$ 是 $(\pi \times \pi)$-自由零调复形. 由上图可知有交换图

$$\begin{array}{ccc}
H_\pi^*(W \times (K \times L)^p; \mathbb{Z}_p) & \leftarrow & H_{\pi\times\pi}^*((W \times W) \times (K^p \times L^p); \mathbb{Z}_p) \\
\downarrow d^* & & \downarrow (d')^* \\
H_\pi^*(W \times K \times L; \mathbb{Z}_p) & \leftarrow & H_{\pi\times\pi}^*(W \times W \times K \times L; \mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

$Pu \times Pv$ 是图右上角群中的元素. 我们有

$$H_{\pi\times\pi}^*(W \times W \times K \times L; \mathbb{Z}_p) \cong H^*(W/\pi \times W/\pi \times K \times L; \mathbb{Z}_p).$$

易见在此同构下, 由定义 2.1 有

$$(d')^*(Pu \times Pv) = \sum_{j,l} (-1)^{l(p-r-j)} w_j \times w_l \times D_j u \times D_l v.$$

将 $(d_1)^*$ 应用在等式两边, 利用交换图, 得

$$d^*\lambda^*(Pu \times Pv) = \sum_{j,l} (-1)^{l(pr-j)} w_j w_l \times D_j u \times D_l v.$$

又有 $d^*P(u \times v) = \sum_k w_k \times D_k(u \times v)$. 由 2.6 得证该引理. ■

由引理 2.12 可知, 对每个 q 存在常数 $a_q \in \mathbb{Z}_p$ 使得

$$D_{q(p-1)}u = a_q u.$$

引理 2.15：$a_q = (-1)^r a_1^q$, 其中 $r = \frac{p(p-1)q(q-1)}{4}$.

证明：引理通过对 q 归纳证明. 由引理 2.12 可知当 $q = 0$ 时该引理成立.

设非零的 $u \in H^{q-1}(K;\mathbb{Z}_p)$,$v$ 为 $H^1(S^1;\mathbb{Z}_p)$ 的生成元. 则 $u \times v \in H^q(K \times S^1;\mathbb{Z}_p)$ 非零. 由引理 2.12, 我们知道只有当 $j = p-1$ 时,$D_j v \neq 0$. 由引理 2.14, 我们知道:

$$D_{q(p-1)}(u \times v) = (-1)^{\frac{p(p-1)(q-1)}{2}} D_{(q-1)(p-1)}u \times D_{p-1}v = (-1)^{\frac{p(p-1)(q-1)}{2}} a_{q-1}a_1(u \times v).$$

因此 $a_q = (-1)^{\frac{p(p-1)(q-1)}{2}} a_{q-1}a_1$. 归纳即得证该引理. ■

为了完全确定 $D_{q(p-1)}$ 的显式, 我们需求出 a_1. 这可以通过 S^1 情形下的计算直接得到.

设 K 是有限正则胞腔复形,$u \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$. 则 $\sum_j w_j \times D_j u$ 由复合映射

$$W \times K \xrightarrow{\varepsilon \otimes d_\#} W \times K^p \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} K^p \xrightarrow{u^p} \mathbb{Z}_p$$

表示, 其中 $d_\#$ 是对角逼近. 任何两个由对角承载子承载的等变链映射 $W \otimes K \to K^p$ 都是等变同伦的. 因此, 为求一维类上的 D_{p-1}, 只需找一个由对角承载子承载的等变链映射

$$\varphi : W \otimes S^1 \to (S^1)^p.$$

我们将 S^1 分解为两个区间 J_1 和 J_2 使之成为正则复形, 其中 $\partial J_1 = A - B$,$\partial J_2 = A - B$. 则 S^1 的同调类为 $J_1 - J_2$.

令 W 为复形. 定义

$$\varphi(e_0 \otimes A) = A^p, \quad \varphi(e_0 \otimes B) = B^p;$$

$$\varphi(e_j \otimes A) = \varphi(e_j \otimes B) = 0 \quad 对 j > 0.$$

因此 φ 由承载子唯一确定. 我们只需把 φ 的定义扩张到等变链映射上

$$\varphi : W \otimes I \to I^p$$

其中 $\partial I = B - A$, 然后分别取 $J_1 = I$ 和 $J_2 = I$ 即得 $W \otimes S^1$ 上的定义.

定义

$$\varphi(e_{2i} \otimes I) = i! \sum (A^{\alpha_0} I B^{\beta_0})(I A^{\alpha_1} I B^{\beta_1}) \cdots (I A^{\alpha_i} I B^{\beta_i})$$

求和遍及所有序列 (α, β) 使得

$$\sum_{j=0}^{i} (\alpha_j + \beta_j) = p - 2i - 1;$$

$$\varphi(e_{2i+1} \otimes I) = i! \sum (I A^{\alpha_0} I B^{\beta_0}) \cdots (I A^{\alpha_i} I B^{\beta_i}).$$

求和遍及所有序列 (α, β) 使得

$$\sum_{j=0}^{i} (\alpha_j + \beta_j) = p - 2i - 2.$$

现在要证明 φ 是链映射. 为此我们使用 I^p 中的可缩同伦. 令 s 为 I 中由由 $sA = 0$,$sB = I$,$sI = 0$ 给出的可缩同伦. 若 $\epsilon : I \to A$ 为增广, 则

$$s\partial + \partial s = 1 - \epsilon.$$

我们用 $S = s \otimes 1^{p-1} + \sum_{r=1}^{p-1} \epsilon^r \otimes s \otimes 1^{p-r-1} + \epsilon^{p-1} \otimes s$. 在 I^p 中定义可缩同伦则

$$\partial S + S\partial = 1^p - \epsilon^p.$$

以下公式有助于计算 S. 设 C 为某 I^r 中的链（$r \geqslant 0$）. 则有:

(i) $S(A^p) = 0$,　(ii) $S(B^p) = \sum_{r=0}^{p-1} A^r I B^{p-r-1}$,

(iii) $S(A^k I C) = 0$ $(k \geqslant 0)$,　(iv) $S(B^t A^s I C) = \sum_{r=0}^{t-1} A^r I B^{t-r-1} A^s I C$ $(t \geqslant 1, s \geqslant 0)$.

我们将证明以下公式

a) $\varphi(e_{2i+1} \otimes I) = S\varphi\partial(e_{2i+1} \otimes I)$;

b) $\varphi(e_{2i} \otimes I) = S\varphi\partial(e_{2i} \otimes I)$　;

c) $\varphi(e_1 \otimes A) = 0 = S\varphi\partial(e_1 \otimes A)$　$(i > 0)$;

d) $\varphi(e_1 \otimes B) = 0 = S\varphi\partial(e_1 \otimes B)$　$(i > 0)$.

令 $\Delta = T - 1$, 其中 T 是 π 中将 1 映为 $i+1$ 的元素. 则

$$S\varphi\partial(e_{2i+1}\otimes I) = S\varphi(\Delta(e_{2i}\otimes I)) = S\Delta\varphi(e_{2i}\otimes I) = i!S\sum(A^{\alpha_0}IB^{\beta_0})(IA^{\alpha_1}IB^{\beta_1})\ldots(IA^{\alpha_i}IB^{\beta_i}).$$

由 (iii),$\beta_1 = 0$ 的项没有影响. 若 $\beta_1 > 0$, 令 $\beta_1' = \beta_1 - 1$. 由 (iii) 可知上面的式子等于

$$i!S\sum_{\beta_i>0}(BA^{\alpha_0}IB^{\beta_0})(IA^{\alpha_1}IB^{\beta_1})\ldots(IA^{\alpha_i}IB^{\beta_i}).$$

由 (iv) 得这个式等于

$$i!\sum_{\beta_1'>0}(IA^{\alpha_0}IB^{\beta_0})(IA^{\alpha_1}IB^{\beta_1})\ldots(IA^{\alpha_i}IB^{\beta_i}).$$

此求和遍历所有满足 $\sum(\alpha_j + \beta_j) = p - 2i - 1$ 且 $\beta_i > 0$ 的序列 (α,β). 因此该表达式等于 $\varphi(e_{2i+1}\otimes I)$. 由此我们证明了 a).

为证 b), 注意若 $i = 0$ 则

$$S\varphi\partial(e_0\otimes I) = S\varphi(e_0\otimes B - e_0\otimes A) = S(B^p - A^p) = \sum A^r IB^{p-r-1} = \varphi(e_0\otimes I).$$

令 $N = 1 + T + \cdots + T^{p-1}$. 若 $i > 0$ 则

$$S\varphi\partial(e_{2i}\otimes I) = S\varphi N(e_{2i-1}\otimes I) = SN\varphi(e_{2i-1}\otimes I) = (i-1)!SN\sum(IA^{\alpha_0}IB^{\beta_0})\ldots(IA^{\alpha_{i-1}}IB^{\beta_{i-1}}).$$

由 (iii) 可知, 有影响的只有以 B 开头的项. 因此该表达式等于

$$(i-1)!S\sum_{\alpha,\beta}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{r=1}^{\beta_j}(B^rIA^{\alpha_{j+1}}IB^{\beta_{j+1}})(IA^{\alpha_{j+2}}IB^{\beta_{j+2}})\cdots(IA^{\alpha_{j-1}}IB^{\beta_{j-1}})(IA^{\alpha_j}IB^{\beta_j-r}).$$

由 (iv) 可知上式等于

$$(i-1)!\sum_{\alpha,\beta}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{r=1}^{\beta_j}\sum_{t=1}^{r-1}(A^tIB^{r-t-1})(IA^{\alpha_{j+1}}IB^{\beta_{j+1}})\cdots(IA^{\alpha_j}IB^{\beta_j-r})$$

$$= (i-1)!\sum_{j=0}^{i-1}\varphi(e_{2i}\otimes I)/i!$$

$$= \varphi(e_{2i}\otimes I).$$

因此证明了 b). 公式 c) 和 d) 由 φ 的定义直接得到.

由 a), b), c),d) 可见, 若 c 是 $W\otimes I$ 中的链且 $\dim c \geqslant 1$, 则 $\varphi c = S\varphi\partial c$.

引理 2.16：φ 是链映射.

证明：我们对维数作归纳来证明该引理. 零维显然成立. 一维时:

$$\varphi\partial(e_1 \otimes A) = \varphi\Delta(e_0 \otimes A) = \Delta\varphi(e_0 \otimes A) = \Delta A^p = 0.$$

同样地 $\partial\varphi(e_1 \otimes A) = 0$, $\partial\varphi(e_1 \otimes B) = 0 = \varphi\partial(e_1 \otimes B)$,

$$\partial\varphi(e_0 \otimes I) = \partial \sum_{r=0}^{p-1} A^r I B^{p-r-1} = B^p - A^p = \varphi\partial(e_0 \otimes I).$$

一维情况得证.

若 $\dim c \geqslant 2$, 则

$$\partial\varphi c = \partial S\varphi\partial c = (1 - S\partial)\varphi\partial c = \varphi\partial c.$$

由归纳法的假设可知有: $\partial\varphi\partial c = \varphi\partial\partial c = 0$. 因此引理得证. ■

令 $m = (p-1)/2$（若 $p > 2$）.

引理 2.17：若 $p > 2$, 则 $a_1 = (-1)^m m!$；若 $p = 2$, 则 $a_1 = 1$.

证明：设 u 为 S^1 的上闭链, 它在 J_1 上取 1, 在 J_2 上取 0. 则 u 生成 $H^1(S^1;\mathbb{Z}_p)$. 我们有

$$(w_{p-1} \otimes D_{p-1}u)(e_{p-1} \otimes (J_1 - J_2)) = (w_{p-1} \cdot e_{p-1})[D_{p-1}u \cdot (J_1 - J_2)] = a_1,$$

且

$$(w_{p-1} \otimes D_{p-1}u)(e_{p-1} \otimes (J_1 - J_2)) = u^p \cdot \varphi(e_{p-1} \otimes (J_1 - J_2)).$$

若 $p = 2$, 则

$$\varphi(e_1 \otimes (J_1 - J_2)) = J_1^2 - J_2^2,$$

因此 $a_1 = 1$.

若 $p > 2$, 则 $p - 1$ 为偶数, 且

$$\varphi(e_{p-1} \otimes (J_1 - J_2)) = m!(J_1^p - J_2^p),$$

因此 $a_1 = m!u^p \cdot J_1^p = (-1)^{p(p-1)/2} m!$. 引理得证. ■

结合引理 2.15 和引理 2.17 我们得到了以下定理

定理 2.1：设 $q > 0, u \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$. 则 $D_{q(p-1)}u = a_q u$, 其中当 $p = 2$ 时 $a_q = 1$；当 $p > 2$ 时 $a_q = (-1)^{mq(q+1)/2}(m!)^q$.

在做好全部前期准备工作后, 我们终于可以定义我们的 Steenrod 平方和 p 次运算了:

定义 2.2：设 K 为有限正则胞腔复形, $u \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$. 若 $p > 2$, 令 $m = (p-1)/2$.

定义

$$P^i u=(-1)^r(m!)^q D_{(q-2i)(p-1)}u,$$

其中 $r=i+m(q^2+q)/2$. 若 $p=2$, 定义

$$Sq^i u=D_{q-i}u.$$

2.2 Steenrod 运算的性质

定义出运算后, 我们要展示它的优越性质和应用实例. 因此我们将先后介绍 Steenrod 运算的公理性质, 再通过拓扑空间的实际例子说明 Steenrod 运算确实能很好地识别更细致的拓扑空间信息.

2.2.1 主要性质

经典模 p 系数上同调理论上的 Steenrod 运算满足以下关键性质:

（1）**同态性**:

$$Sq^i(x+y)=Sq^i(x)+Sq^i(y)\quad ;\quad P^n(x+y)=P^n(x)+P^n(y)$$

（2）**运算次数与作用元素的阶数的关系**:

$$Sq^i(x)=x^2\quad 若|x|=i\quad ,\quad Sq^i x=0\quad 若|x|<i$$

$$P^n(x)=x^p\quad 若\ |x|=2n\quad ,\quad P^n\ (x)=0\quad 若\ |x|<2n$$

（3）**稳定性**: Steenrod 运算与悬垂映射诱导的上同调间的同构映射交换. 即, 若 $\sigma:\Sigma X\to X$ 表示悬垂映射, 则:

$$\sigma^*\circ Sq^i=Sq^i\circ\sigma^*\quad ,\quad \sigma^*\circ P^i=P^i\circ\sigma^*.$$

由此我们也将 Steenrod 平方运算与 Steenrod 幂运算称为稳定的上同调运算.

（4）**单位元性质**: 恒等运算对应于零次运算:

$$Sq^0=\mathrm{id}\quad ,\quad P^0=\mathrm{id}.$$

（5）**Cartan 公式**: 该公式描述了运算与杯积的相容性, 由 Cartan 给出.

•对于 Sq^i:

$$Sq^k(x\smile y)=\sum_{i+j=k}Sq^i x\smile Sq^j y.$$

•对于 P^i 和 Bockstein 同态:

$$P^k(x\smile y)=\sum_{i+j=k}P^i x\smile P^j y,\quad \beta(x\smile y)=\beta x\smile y+(-1)^{\deg x}x\smile\beta y.$$

（6）**Adem 关系**: 该关系描述了复合运算的线性组合, 由 Adem 给出.

•对于 $p=2$, 当 $a<2b$ 时:

$$Sq^aSq^b=\sum_c\binom{b-1-c}{a-2c}Sq^{a+b-c}Sq^c,$$

•对于奇素数 p, 当 a < pb 时:

$$P^aP^b=\sum_k(-1)^{a+k}\binom{(p-1)(b-k)-1}{a-pk}P^{a+b-k}P^k,$$

$$P^k\beta P^cu=\sum_r(-1)^{r+k}\binom{(p-1)(c-r)}{k-pr}\beta P^{c+k-r}P^ru$$
$$+\sum_r(-1)^{r+k+1}\binom{(p-1)(c-r)}{k-pr-1}P^{c+k-r}\beta P^ru.$$

P^i 的上述两条性质也被分别称为 Adem 第一关系和 Adem 第二关系.

这些性质共同构成了 Steenrod 运算的理论框架, 也为我们使用 Steenrod 运算提供了便捷.

定理 2.2：P^i 满足上述性质中除了 Adem 关系外的全部性质.

我们将证明分为若干引理.

引理 2.18：$(m!)^2\equiv(-1)^{m+1}\mod p$.

证明：由威尔逊定理,$(p-1)!\equiv-1\mod p$. 因此

$$-1\equiv(p-1)!\equiv1\cdot2\cdots\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{p+1}{2}\right)\cdots(p-1)$$

$$\equiv1\cdot2\cdots\left(\frac{p-1}{2}\right)\left[-\frac{(p-1)}{2}\right]\cdots(-2)(-1)$$

$$\equiv(m!)^2(-1)^m.$$

引理得证. ■

引理 2.19：$P^0=\mathbb{1}$, 其中 $\mathbb{1}$ 是恒等映射 id.

证明：设 $\dim u=q$. 由定义可知

$$P^0u=(-1)^r(m!)^{-q}D_{q(p-1)}u,$$

其中 $n=m(q^2+q)/2$. 由定理 2.1 可得 $P^0u=u$. ■

引理 2.20：（Cartan 公式）若 $u\in H^r(K)$,$v\in H^s(L)$, 则

$$P^k(u\times v)=\sum_{i+j=k}P^iu\times P^jv.$$

证明：

$$P^i u \times P^j v = (-1)^{i+j+m(r^2+r+s^2+s)/2}(m!)^{-r-s} D_{(r-2i)(p-1)} u \times D_{(s-2j)(p-1)} v.$$

由引理 2.14、引理 2.12 和引理 2.9 可知上式等于

$$\sum_{i+j=k} P^i u \times P^j v = (-1)^{i+j+m(r^2+r+s^2+s)/2}(m!)^{-r-s} \sum_{i+j=k} D_{(r-2i)(p-1)} u \times D_{(s-2j)(p-1)} v.$$

$$= (-1)^{mrs+k+m((r+s)^2+(r+s))/2}(m!)^{-r-s} D_{(r+s-2k)(p-1)}(u \times v).$$

而 $mrs + i + j + m(r^2 + r + s^2 + s)/2 = k + m((r+s)^2 + (r+s))/2$, 于是由定义即得此引理. ■

引理 2.21：若 $\dim u = 2k$, 则 $P^k u = u^p$.

证明：$P^k u = (-1)^r (m!)^{-2k} D_0 u$, 其中 $r = k + m(4k^2 + 2k)/2 \equiv k(m+1)$ (mod 2).$(m!)^{-2k} \equiv (-1)^{k(m+1)}$ mod p. 由此即得证此引理. ■

综合以上引理即得定理 2.2, 即我们说明了构造出来的幂运算满足除了 Adem 关系之外的全部公理.

定理 2.3：Sq^i 满足除了 Adem 关系之外的全部公理.

证明：公理 1)-5) 的证明与定理 2.2 的证明非常类似, 只是不需要考虑 $\mathbb{Z}_p$ 系数. 我们只需证明 $\beta = Sq^1$. 若 $\dim u = 2q$, 由推论 2.2

$$Sq^1 u = D_{2q-1} u = \beta D_{2q} u = \beta Sq^0 u = \beta u.$$

为完成该定理的证明, 我们证明以下引理. ■

引理 2.22：若 $p = 2$, 令 R 为由 β 与 Sq^i（$i = 0, 1, 2, \cdots$）复合组成的运算的和. 若 p 为奇素数, 令 R 为由 β 或 P^i 组成的上同调运算的复合的和. 设 n_j 为严格递增的整数数列, 且 $Ru = 0$ 对任何维数为 n_j 的上同调类 u 成立. 则 Ru 对一切上同调类 u 为零.

证明：设 R 在维数为 r 的上同调类上的作用为零. 我们证明对一切维数为 $r-1$ 的上同调类 u 都有 $Ru = 0$.

令 $v \in H^1(S^1; \mathbb{Z}_p)$, 则引理所述运算中非零的只有恒等映射（P^0 或 Sq^0）. 由嘉当公式我们知道:

$$R(u \times v) = Ru \times v.$$

由于 $\dim(u \times v) = r$, 有 $Ru \times v = 0$, 从而 $Ru = 0$. 引理得证, 同时也完成了定理的证明. ■

2.2.2 Adem 关系的证明

设 Σ_{p^2} 为 p^2 个元素的对称群, 这些元素为有序对 (i,j), 其中 $i,j\in\mathbb{Z}_p$. 把这些有序对排列成一个矩阵,(i,j) 位于第 i 行第 j 列. 令 $\alpha(i,j)=(i+1,j)$,$\beta(i,j)=(i,j+1)$. 则 $\alpha\beta=\beta\alpha$,α 和 β 分别生成 p 阶循环群 π 和 ρ. 令 $\sigma=\pi\times\rho$, 则 σ 是 Σ_{p^2} 的一个 p^2 阶子群.

设 W 是一个 π-自由零调复形, 并通过将 β 映为 α 的同构让 ρ 作用在 W 上. 则 $W\otimes W$ 是一个 $(\pi\times\rho)$-自由零调复形, 其中 π 作用在第一个 W 上,ρ 作用在第二个 W 上.

令 $\mathbb{Z}_p^{(q)}$ 表示 Σ_{p^2}-模, 其作为阿贝尔群是 $\mathbb{Z}_p$, 且置换的作用为: 若 q 为奇数则乘以置换的正负号, 否则平凡地作用. 设 R 为 Σ_{p^2} 的任一子群. 设 V 为 R-自由复形, 带有循环群作用. 由之前的构造, 我们有映射

$$P':H^q(K;\mathbb{Z}_p)\to H_R^{p^2q}(V\times K^{p^2};\mathbb{Z}_p^{(q)}).$$

若 R 是 σ 的子群, 则 $\mathbb{Z}_p^{(q)}$ 是平凡 R-模, 因为要么 $p=2$, 要么 R 只包含偶置换.

令 $W_1=W$ 带有 π 作用,$W_2=W$ 带有 ρ 作用. 则

可在 $W_1\times(W_2\times K^p)^p$ 上定义 $\pi\times\rho$ 的作用如下:

$$(\alpha,\beta)(x\times(y_1\times z_1)\times\cdots\times(y_p\times z_p))=\alpha x\times(\beta y_{\alpha(1)}\times\beta z_{\alpha(1)})\times\cdots\times(\beta y_{\alpha(p)}\times\beta z_{\alpha(p)})$$

对所有 $\alpha\in\pi$,$\beta\in\rho$,$x\in W_1$,$y_i\in W_2$,$z_i\in K^p$（我们将 π 和 ρ 都视为 p 个元素的循环置换群）. 我们在 $W_1\times W_2^p\times(K^p)^p$ 上定义 $\pi\times\rho$ 的作用:

$$(\alpha,\beta)(x\times y_1\times\cdots\times y_p\times z_1\times\cdots\times z_p)=\alpha x\times\beta y_{\alpha(1)}\times\beta z_{\alpha(1)}\times\cdots\times\beta z_{\alpha(p)},$$

其中变量含义与前式相同.

现在 $W_1\times W_2^p$ 是一个 $(\pi\times\rho)$-自由零调复形. 因此我们有同构

$$H^*_{\pi\times\rho}(W_1\times W_2\times K^{p^2};\mathbb{Z}_p)$$

$$\cong H^*_{\pi\times\rho}(W_1\times W_2^p\times(K^p)^p;\mathbb{Z}_p)$$

$$\cong H^*_{\pi\times\rho}(W_1\times(W_2\times K^p)^p;\mathbb{Z}_p)$$

$$\cong H^*(W_1\times_\pi(W_2\times K^p)^p;\mathbb{Z}_p),$$

其中 $\pi\times\rho$ 在 $K^{p^2}=(K^p)^p$ 上的作用为

$$(\alpha,\beta)(z_1\times\cdots\times z_p)=\beta z_{\alpha(1)}\times\cdots\times\beta z_{\alpha(p)}.$$

因此我们有由对角映射 $d_2 : W_2 \to W_2^p$ 诱导的同构

$$H^*(W_1 \times_\pi (W_2 \times_\rho K^p)^p; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(W_1 \times_\pi W_2 \times_\rho K^{p^2}; \mathbb{Z}_p).$$

引理 2.23： 下图交换

$$\begin{tikzcd}
H^{pq}(K;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "P'"] & H^{pq}(W_2 \times_\rho K^P;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, "P"] & H^{pq}(W_2/_\rho \times K;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "P"] \\
\mathbf{H}^{p^2q}(W_1 \times_\pi W_2 \times_\rho K^{p^2};\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "(d')^*"] & \mathbf{H}^{p^2q}(W_1 \times_\pi (W_2 \times_\rho K^p)^p;\mathbb{Z}_p) \arrow[l, "(d_2)^*"'] \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, "(d_3)^*"] & \mathbf{H}^{p^2q}(W_1 \times_\pi (W_2/_\rho \times K)^p;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "(d_2 \times d)^*"] \\
\mathbf{H}^{p^2q}(W_1/_\pi \times W_2/_\rho \times K;\mathbb{Z}_p) & \mathbf{H}^{p^2q}(W_1/_\pi \times W_2 \times_\rho K^p;\mathbb{Z}_p) \arrow[l, "d^*"'] \arrow[r, "d^*"] & \mathbf{H}^{p^2q}(W_1/_\pi \times W_2/_\rho \times K;\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

其中 $d' : K \to K^{p^2}$,$d_1 : K \to K^p$, 而 $d_3 : W_2 \times K^p \to (W_2 \times K^p)^p$ 是对角映射.

证明： 下面两个正方形的交换性源于上同调群之间的映射是由交换的连续映射诱导出来的. 右上方的正方形由引理 2.3 保证其交换性. 左上方的正方形交换是由其在上链层次的交换性诱导出来的. ■

由 Künneth 定理, 我们可以得到

$$(d')^* P' u = \sum_{j,k} w_j \times w_k \times D_{j,k} u.$$

推论 2.3：

$$\sum_{j,k} w_j \times w_k \times D_{j,k} u = \sum_j w_j \times D_j \left(\sum_q w_q \times D_q u \right).$$

引理 2.24： 若 $u \in H^q(K; \mathbb{Z}_p)$, 则

$$D_{j,k} u = (-1)^{jk + p(p-1)q/2} D_{k,j} u.$$

证明： 令 $\lambda \in \Sigma_{p^2}$ 为满足 $\lambda(i,j) = (j,i)$ 的元素. 用 λ^* 表示 λ 在上同调层次诱导的自同构. 设 V 为 Σ_{p^2}-自由零调复形. 令 $\sigma = \pi \times \rho$. 则我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{H}_\sigma^{p^2q}(\mathbf{W} \times \mathbf{W} \times \mathbf{K}; \mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[r, "\lambda^*"] & \mathbf{H}_\sigma^{p^2q}(\mathbf{W} \times \mathbf{W} \times \mathbf{K}; \mathbb{Z}_p^{(q)}) \\
H^q(K;\mathbb{Z}_p) \arrow[ur, "(d')^* P"] \arrow[dr, "(d')^* P"'] & & \\
 & \mathbf{H}_{\Sigma_{p^2}}^{p^2q}(\mathbf{V} \times \mathbf{K}; \mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[r, "\lambda^* = 1"'] \arrow[uu] & \mathbf{H}_{\Sigma_{p^2}}^{p^2q}(\mathbf{V} \times \mathbf{K}; \mathbb{Z}_p^{(q)}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

为了更好地知道 λ^* 的性质, 我们构造一个链映射

$$\lambda_\# : W \otimes W \longrightarrow W \otimes W.$$

使得

$$\lambda_\# \alpha = \beta \lambda_\# \quad \text{且} \quad \lambda_\# \beta = \alpha \lambda_\#$$

其中 α 生成 π 并作用在第一个分量 W 上,β 生成 ρ 并作用在第二个分量 W 上, 同时满足

$$\lambda_\#(v_1 \otimes v_2) = (-1)^{jk}(v_2 \otimes v_1),$$

其中 $\dim v_1 = j$,$\dim v_2 = k$. 现在 λ 转置一个 $p \times p$ 矩阵, 因此它是一个置换, 其正负号为 $(-1)^{p(p-1)/2}$. 我们知道

$$\lambda^*(w_j \times w_k \times D_{j,k}u)$$

由 $(\pi \times \rho)$-等变上闭链表示

$$W \times W \times K \xrightarrow{\lambda_\# \otimes 1} W \otimes W \otimes K \xrightarrow{w_j \otimes w_k \otimes D_{j,k}u} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{(-1)^{p(p-1)q/2}} \mathbb{Z}_p$$

这个上闭链等于

$$(-1)^{jk+p(p-1)q/2} w_k \otimes w_j \otimes D_{j,k}u.$$

由交换图即得上述引理. ■

$\binom{r}{j} = 0$ 若 $r < 0$ 或 $j < 0$；$\binom{r}{0} = 1$ 若 $r \geqslant 0$；$w_r \in H^r(\pi; \mathbb{Z}_p)$ 在 $r < 0$ 时为零；Sq^j 和 P^j 在 $j < 0$ 时为零. 除非特别说明, 所有求和从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

由前面的储备, 我们有:

$Sq^j w_r = \binom{r}{j} w_{r+j}$, 对任意整数 r 和 j 成立；

$$P^j w_{2r} = \binom{r}{j} w_{2r+2j(p-1)},$$

$$\beta P^j w_{2r} = 0,$$

$$P^j w_{2r-1} = \binom{r-1}{j} w_{2r+2j(p-1)-1},$$

$$\beta P^j w_{2r-1} = -\binom{r-1}{j} w_{2r+2j(p-1)-1}.$$

定理 2.4：我们在前文中定义的 Sq^j 满足 Adem 关系.

证明：若 $\dim u = q$, 则

$$d^* P u = \sum_i w_{q-i} \times Sq^i u.$$

由上面的定义和 Cartan 公式, 我们有

$$(d')^* P' u = \Sigma_{i,k} w_{2q-k} \times Sq^k(w_{q-i} \times Sq^i u)$$

$$= \Sigma_{i,k,j} \binom{q-i}{j} w_{2q-k} \times w_{q-i+j} \times Sq^{k-j} Sq^i u.$$

因此有

$$D_{2q-k,2q-\ell} u = \Sigma_i \binom{q-i}{q-\ell+i} Sq^{k+\ell-i-q} Sq^i u.$$

因此我们有

$$D_{2q-k,2q-\ell} u = D_{2q-\ell,2q-k} u.$$

因此有

$$\Sigma_i \binom{q-i}{q-\ell+i} Sq^{k+\ell-i-q} Sq^i u = \Sigma_r \binom{q-r}{q-k+r} Sq^{k+\ell-r-q} Sq^r u.$$

令 $q = 2^s - 1 + c$ 并且令 $\ell = q + c$. 非负整数 s, k 和 c 可以任取, 则有

$$\binom{q-i}{q-\ell+i} = \binom{2^s - 1 + (c-i)}{(i-c)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq c \\ 1 & \text{if } i = c. \end{cases}$$ 由上面的约定可以得,

$$\binom{q-r}{q+r-k} = \binom{q-r}{k-2r} = \binom{2^s - 1 + c - r}{k-2r} \text{ 由于} \binom{x}{y} = \binom{x}{x-y}.$$

现在假设 $k < 2c$. 刚刚检验的二项式系数在 $2r \leqslant k$ 时为零, 因此除非 $c - r > 0$, 否则为零. 当 $2^s > k$ 且 $r \geqslant 0$, 该二项式系数等于

$$\binom{c-r-1}{k-2r}.$$

代入 (1) 式, 如果 $k < 2^s, 2c$ 且 $\dim u = q = 2^s - 1 + c$, 则 (2)

$$Sq^k Sq^c u = \sum_r \binom{c-r-1}{k-2r} Sq^{k+c-r} Sq^r u.$$

由引理 2.22, 定理得证. ∎

定理 2.5: 我们在前文中定义的 P^i 满足第一和第二 Adem 关系.

证明: 由引理 2.9、引理 2.12 和定义 2.2, 我们有, 若 $2m = p - 1$ 且 $v(q) =$

$(m!)^{-q}(-1)^{m(q^2+q)/2}$, 则

$$v(q)\,d^*Pu=\sum_i(-1)^i w_{(q-2i)2m}\times P^iu+\sum_i(-1)^i w_{(q-2i)2m-1}\times\beta P^iu.$$

由推论 2.3 我们有

$$v(pq)v(q)(d^*)P^ku=\sum_{k,i}(-1)^{i+k}w_{(pq-2k)2m}\times P^k(w_{(q-2i)2m}\times P^iu)$$

$$+\sum_{k,i}(-1)^{i+k}w_{(pq-2k)2m}\times P^k(w_{(q-2i)2m-1}\times\beta P^iu)$$

$$+\sum_{k,i}(-1)^{i+k}w_{(pq-2k)2m-1}\times\beta P^k(w_{(q-2i)2m}\times P^iu)$$

$$+\sum_{k,i}(-1)^{i+k}w_{(pq-2k)2m-1}\times\beta P^k(w_{(q-2i)(2m-1)}\times\beta P^iu).$$

由 Cartan 公式, 我们有

$$P^k\left(W_{(q-2i)2m}\times P^iu\right)=\sum_j\binom{(q-2i)m}{j}W_{(q-2i+2j)2m}\times P^{k-j}P^iu.$$

$$P^k\left(W_{(q-2i)2m-1}\times\beta P^iu\right)=\sum_j\binom{(q-2i)m-1}{j}W_{(q-2i+2j)2m-1}\times P^{k-j}\beta P^iu.$$

$$\beta P^k\left(W_{(q-2i)2m}\times P^iu\right)=\sum_j\binom{(q-2i)m}{j}W_{(q-2i+2j)2m}\times\beta P^{k-j}P^iu.$$

$$\beta P^k\left(W_{(q-2i)2m-1}\times\beta P^iu\right)=\sum_j\binom{(q-2i)m-1}{j}W_{(q-2i+2j)2m}\times P^{k-j}\beta P^iu$$

$$-\sum_j\binom{(q-2i)m-1}{j}W_{(q-2i+2j)2m-1}\times\beta P^{k-j}P^iu.$$

因此, 如果 a=pq-2k 且 b=q-2i+2j, 那么我们有:

(1)

$$v(pq)v(q)D_{2am,2bm}u=\sum_{i,j,k}(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m}{j}P^{k-j}P^iu;$$

(2)

$$v(pq)v(q)D_{2am,2bm-1}u=\sum_{i,j,k}(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m-1}{j}P^{k-j}\beta P^{i}u;$$

(3)

$$v(pq)v(q)D_{2am-1,2bm}u=\sum_{i,j,k}(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m}{j}\beta P^{k-j}P^{i}u$$
$$-\sum_{i,j,k}(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m-1}{j}P^{k-j}\beta P^{i}u;$$

现在由引理 2.18 得

$$v(q)^4\equiv 1\pmod p.$$

因此 v(pq) v(q) 有逆元.

引理 2.25：模 p 的 Steenrod 幂运算满足第一 Adem 关系, 即有:

$$P^kP^cu=\sum_{r}(-1)^{r+k}\binom{(p-1)(c-r)-1}{k-pr}P^{c+k-r}P^{r}u.$$

证明: 令 $a=pq-2k,b=pq-2l$. 由（1）我们有（4）:

$$\sum_{i}(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m}{mq-l+1}P^{k-mq+l-1}P^{i}u$$

$$=\sum_{r}(-1)^{r+l+mq}\binom{(q-2r)m}{mq-k+r}P^{l-mq+k-r}P^{r}u.$$

令 $q=2(1+\cdots+p^{s-1})+2c,l=c+mq$ 并且任取整数 s,c 和 k. 那么有:

$$\binom{(q-2i)m}{mq-l+1}=\binom{(p-1)(1+\cdots+p^{s-1})+(p-1)(c-i)}{i-c}=\begin{cases}0, & i\neq c\\ 1, & i=c\end{cases}$$

并且

$$\binom{(q-2r)m}{mq-k+r}=\binom{(q-2r)m}{k-pr}\quad \text{由于}\quad \binom{x}{y}=\binom{x}{x-y}$$

$$=\binom{p^s-1+(p-1)(c-r)}{k-pr}.$$

现在假设 $k<pc$. 上述二项式系数只有当 $pr\leqslant k$ 且 $r<c$ 时才非零. 当 $p^s>k$ 且 $r\geqslant 0$ 时, 该二项式系数等于 $\binom{(p-1)(c-r)-1}{k-pr}$.

代入 (4) 得到: 若 $p^s > k$,$k < pc$ 且 $\dim u = q = 2(1 + \cdots + p^{s-1}) + 2c$, 则

$$P^k P^c u = \sum_r (-1)^{r+k} \binom{(p-1)(c-r)-1}{k-pr} P^{c+k-r} P^r u.$$

由引理 2.22, 引理得证.

引理 2.26：模 p 的 Steenrod 幂运算满足第二 Adem 关系, 即有

$$P^k \beta P^c u = \sum_r (-1)^{r+k} \binom{(p-1)(c-r)}{k-pr} \beta P^{c+k-r} P^r u$$

$$+ \sum_r (-1)^{r+k+1} \binom{(p-1)(c-r)}{k-pr-1} P^{c+k-r} \beta P^r u.$$

证明：令 $a = (pq-2k)$,$b = (pq-2l)$. 由引理 2.24、（2）和（3）有

$$\sum_i (-1)^{i+k+mq+1} \binom{(q-2i)m-1}{mq-l+i} P^{k-mq-i+l} \beta P^i u$$

$$= \sum_r (-1)^{r+l+1} \binom{(q-2r)m}{mq-l+i} \beta P^{l-mq-r+k} P^r u$$

$$+ \sum_r (-1)^{r+l} \binom{(q-2r)m-1}{mq+r-k} P^{l-mq-r+k} \beta P^r u.$$

令 $q = 2p^s + 2c$, 且 $l = c + mq$. 取 s, c, k 为任意整数, 则有

$$\binom{(q-2i)m-1}{mq-l+i} = \binom{(p-1)(1+\cdots+p^{s-1}+(p-1)(c-i))}{i-c}$$

$$= \begin{cases} 0 & 若 i \neq c \\ 1 & 若 i = c \end{cases}.$$

$$\binom{(q-2r)m}{mq-k+r} = \binom{(q-2r)m}{k-pr} = \binom{(p-1)(p^s+c-r)}{k-pr}.$$

现在假设 $k \leqslant pc$. 上述二项式只有在 $pr \leqslant k$, 且 $r \leqslant c$ 时才非零. 在 $p^s > k$ 且 $r \geqslant 0$ 时, 它等于 $\binom{(p-1)(c-r)}{k-pr}$. 继续推算, 我们有

$$\binom{(q-2r)m-1}{mq-k+r} = \binom{(q-2r)m-1}{k-pr-1} = \binom{(p-1)(p^s+c-r)-1}{k-pr-1}.$$

该二项式系数只有在 $pr < k$ 且 $c < r$ 时才非零. 除此之外,当 $p^s > k$ 且 r □0

时, 它等于

$$\binom{(p-1)(c-r)-1}{k-pr-1}\ .$$

代入 (5) 得到: 当 $p^s>k,k\leqslant pc$ 且 $\dim u=q=2p^s+2c$ 时, 有

$$P^k\beta P^c u=\sum_r(-1)^{r+k}\binom{(p-1)(c-r)}{k-pr}\beta P^{c+k-r}P^r u$$

$$+\sum_r(-1)^{r+k+1}\binom{(p-1)(c-r)}{k-pr-1}P^{c+k-r}\beta P^r u.$$

由引理 2.22 得证. ■

因此我们证明了 P^i 满足第一和第二 Adem 关系. 综上证明完毕 Sq^i 和 P^i 的性质.

证明性质的目的当然是使用性质, 因此我们将通过以下的例子来展示 Steenrod 运算的威力.

例 2.1：$\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2$ 和 $S^8\vee S^6$ 具备相同的上同调环结构, 但它们并不同伦等价.

证明：由胞腔上同调可知, 对于任意系数环 R ,$H^*(\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2;R)$ 和 $H^*(S^8\vee S^6;R)$ 在次数 0、6 和 8 上的上同调群均为 R, 并且由次数考虑, 两者必有平凡乘积结构. 因此 $H^*(\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2;R)\cong H^*(S^8\vee S^6;R)$. 所以单凭上同调理论, 我们找不到两个空间的差别, 不知道它们的上同调环相同是因为空间同胚或同伦等价还是因为上同调理论不够精细. 幸运的是, 凭借 Steenrod 平方运算, 我们可以识别出它们的区别, 判断它们并非同伦等价.

因为 $H^*(\mathbb{CP}^4;\mathbb{F}_2)\simeq\mathbb{F}_2[x]/(x^5)$, 其中 $|x|=2$, 所以 $H^6(\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2;\mathbb{F}_2)$ 由 x^3 生成, 而 $H^8(\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2;\mathbb{F}_2)$ 由 x^4 生成. 所以由 Steenrod 平方运算的性质（主要用到 Cartan 公式）可得:

$$\begin{aligned}Sq^2(x^3)&=Sq^0(x^2)Sq^2(x)+Sq^1(x^2)Sq^1(x)+Sq^2(x^2)Sq^0(x)\\&=x^2\cup x^2+x\cup Sq^2(x^2)\\&=x^4+x\cup(Sq^0(x)Sq^2(x)+Sq^1(x)Sq^1(x)+Sq^2(x)Sq^0(x))\\&=x^4+x\cup(x\cup x^2+x^2\cup x)\\&=3x^4=x^4\neq 0.\end{aligned}$$

另一方面, 由 Steenrod 平方运算的自然性可得如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^6(S^6;\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^8(S^6;\mathbb{F}_2)=0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^6(S^6\vee S^8;\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{Sq^2} & H^8(S^6\vee S^8;\mathbb{F}_2) \end{array}$$

由于交换图左右两侧垂直方向的上同调群之间的映射都由拓扑空间之间的投射诱导, 因此左右两侧垂直方向的映射都是同构. 又由于交换图交换, 所以 Sq^2 把 $H^6(S^6\vee S^8;\mathbb{F}_2)$ 上的全部元素打到 $H^8(S^6\vee S^8;\mathbb{F}_2)$ 中的零元, 即 Sq^2 在这里是零映射. 因此 Sq^2 在 $H^6(S^6\vee S^8;\mathbb{F}_2)$ 上是零映射, 而在 $H^6(\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2;\mathbb{F}_2)$ 上不是零映射, 所以 $\mathbb{CP}^4/\mathbb{CP}^2\not\simeq S^6\vee S^8$.

■

2.3　Steenrod 代数的 Hopf 代数结构

代数拓扑的两大主题是理论与计算. 球面稳定同伦群则是一个很重要的计算内容. 人们借由 Steenrod 运算构造 Steenrod 代数, 再通过 Steenrod 代数研究 Adams 谱序列, 以计算球面稳定同伦群. 具体地说, 使用 Steenrod 代数可以写出 Adams 谱序列的 $\mathbb{E}_2$ 页, 通过谱序列的微分可以得到谱序列收敛后的稳定信息进而得到稳定同伦群信息. 这一思路促进了球面稳定同伦群计算工作的不断推进. 这方面的详细内容可以参考 Adams 的相关工作与总结[1][2][3].

在这一节里, 我们将介绍 Steenrod 代数的构造及其 Hopf 代数结构, 以加深我们对于 Steenrod 运算的了解.

2.3.1. Hopf 代数与对偶 Hopf 代数

定义 2.3： 设 R 是一个含单位元的交换环.

（1）**分次 R-模** M 是一列 R-模 $(M_i)_{i\geqslant 0}$.

（2）**分次 R-模的同态** $f:M\to N$ 是一列模同态 $(f_i:M_i\to N_i)_{i\geqslant 0}$, 其中每个 f_i 是 R-模同态.

（3）分次 R-模 M 和 N 的**张量积**定义为 $\big((M\otimes N)_i\big)_{i\geqslant 0}$, 其中

$$(M\otimes N)_i=\bigoplus_{p+q=i} M_p\otimes N_q.$$

注释 2.2： 可以通过取 $R_0=R, R_i=0\ (i\neq 0)$ 而将环 R 视为一个分次 R-代数. 记 $\mathbb{1}:A\to A$ 为恒等映射. 定义 $T:M\otimes N\to N\otimes M$, $T(m\otimes n)=(-1)^{ij}(n\otimes m)$, 其中 $i=\deg m, j=\deg n$.

定义 2.4 (代数)：设 A 是一个分次 R-模. 若存在映射 $\boldsymbol{\nabla}: A \otimes A \to A$, 则称 A 具有一个**乘法**.

（1）$\boldsymbol{\nabla}$ 称为**结合**的, 如果下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbb{1}"] \arrow[d, "\mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\nabla}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\boldsymbol{\nabla}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\boldsymbol{\nabla}"'] & A \end{tikzcd}$$

即 $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}(a \otimes b) \otimes c) = \boldsymbol{\nabla}(a \otimes \boldsymbol{\nabla}(b \otimes c))$.

（2）$\boldsymbol{\nabla}$ 有**单位**, 如果存在一个 R-同态 $\eta: R \to A$, 使得在下图中两个复合映射均为恒等映射:

$$\begin{tikzcd} & A \otimes R \arrow[dr, "\mathbb{1} \otimes \eta"] & & \\ A \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & & A \otimes A \arrow[r, "\boldsymbol{\nabla}"'] & A \\ & A \otimes R \arrow[ur, "\eta \otimes \mathbb{1}"'] & & \end{tikzcd}$$

即 $\boldsymbol{\nabla}(a \otimes \eta(1)) = a = \boldsymbol{\nabla}(\eta(1) \otimes a)$.

满足（1）和（2）的三元组 $(A, \boldsymbol{\nabla}, \eta)$ 称为一个**R-代数**.

（3）一个代数称为交换的, 如果下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\boldsymbol{\nabla}"] \arrow[d, "T"'] & A \\ A \otimes A \arrow[ur, "\boldsymbol{\nabla}"'] & \end{tikzcd}$$

即 $\boldsymbol{\nabla}(a \otimes b) = (-1)^{\deg(a)\deg(b)} \boldsymbol{\nabla}(b \otimes a)$.

（4）分次 R-代数的同态是一个分次 R-模的同态, 且保持乘法和单位.

定义 2.5：设 A 和 B 是分次 R-代数. 通过定义 $\varphi_{A \otimes B} = (\varphi_A \otimes \varphi_B) \circ (1 \otimes T \otimes 1)$, 张量积 $A \otimes B$ 赋予分次 R-代数的结构, 即

$$(a_i \otimes b_j)(a_k \otimes b_l) = (-1)^{jk}(a_i a_k \otimes b_j b_l),$$

其中 $a_i \in A_i$,$b_j \in B_j$.

设 M 是一个分次 R-模. **张量代数** $\Gamma(M)$ 是由 r 重张量积定义的分次 R-代数:$\Gamma(M)_r = M^{\otimes r}$, 其中 $M^0 = R$. 乘法由同构 $M^r \otimes M^s \cong M^{r+s}$ 给出. 张量代数 $\Gamma(M)$ 是结合的, 但不是交换的.

通过反转定义 2.4 中所有交换图的箭头, 可以将乘法和单位的同态对偶化, 从而得到余代数的结构.

定义 2.6 (余代数)：设 A 是一个分次 R-模. 若存在映射 $\Delta : A \to A \otimes A$, 则称 A 具有一个**余乘法**（或**对角映射**）.

（1）Δ 称为**余结合**的, 如果下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\mathbb{1}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes\Delta"'] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

（2）Δ 具有**余单位**, 如果存在一个 R-同态 $\varepsilon : A \to R$, 使得在下图中两个复合映射均为恒等映射:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes R \arrow[dl, "\cong"'] & & \\
A & & A \otimes A \arrow[ul, "\mathbb{1}\otimes\varepsilon"'] \arrow[dl, "\varepsilon\otimes\mathbb{1}"] & A \arrow[l, "\nabla"] \\
& A \otimes R \arrow[ul, "\cong"] & &
\end{tikzcd}$$

余单位有时也被称为 A 的**增广**.

满足（1）和（2）的三元组 (A, Δ, ε) 被称为一个**R-余代数**.

（3）一个余代数被称为是**余交换**的, 如果下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[dd, "T"'] & \\
& A \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\
A \otimes A &
\end{tikzcd}$$

（4）分次 R-余代数的同态是一个分次 R-模的同态, 且保持余乘法和余单位.

定义 2.7 (Hopf 代数)：设 A 是一个分次 R-模, 带有乘法 $\nabla : A \otimes A \to A$、余乘法 $\Delta : A \to A \otimes A$、单位 $\eta : R \to A$ 和增广 $\varepsilon : A \to R$. 则 A 称为一个**R-Hopf 代数**, 如果

（1）(A, ∇, η) 是一个 R-代数;

（2）(A, Δ, ε) 是一个 R-余代数;

（3）复合映射 $\eta \circ \varepsilon$ 和 $\varepsilon \circ \eta$ 在零次上是恒等映射;

（4）下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \\
A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "1\otimes T\otimes 1"'] & & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[u, "\nabla\otimes\nabla"']
\end{tikzcd}$$

即 Δ 是一个代数范畴里的态射, 等价地,∇ 是一个余代数范畴里的态射.

2.3.2. Steenrod 运算的代数结构

现在我们已经定义好了 Steenrod 运算, 知道了其满足的公理, 接下来我们在此基础上构造 $\mathcal{A}_2$, 并说明它是一个 Hopf 代数（Cartan 公式和 Adem 关系正是这一 Hopf 代数的余乘法和乘法）.

首先我们定义模 2 系数的 Steenrod 运算构成的 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$.

设 F 表示由集合 $\{\mathrm{Sq}^i : i = 0,1,2,\cdots\}$ 生成的自由 $\mathbb{Z}/2$-模. 我们将 F 视为分次 $\mathbb{Z}/2$-模, 其中 $F_i = \mathbb{Z}/2 \cdot \mathrm{Sq}^i$.

对于全部满足 $0 < a < 2b$ 的整数 (a, b), 设

$$R(a,b) = \mathrm{Sq}^a \otimes \mathrm{Sq}^b + \sum_j \binom{b-j-1}{a-2j} \mathrm{Sq}^{a+b-j} \otimes \mathrm{Sq}^j.$$

记 Q 为由所有这样的 $R(a,b)$ 以及 $1 + \mathrm{Sq}^0$ 生成的 $\Gamma(F)$ 的双边理想.

定义 2.8：Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$ 是商代数 $\Gamma(F)/Q$.$\mathcal{A}_2$ 是 $\mathbb{Z}/2$ 上的分次代数.

换言之,Steenrod 代数是由 $\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^2, \mathrm{Sq}^3, \cdots$ 生成的多项式代数商掉由 Adem 关系生成的双边理想后得到的商代数.

给定一个正整数序列 $I = \{i_1, \cdots, i_r\}$, 记 Sq^I 为乘积 $\mathrm{Sq}^{i_1} \cdots \mathrm{Sq}^{i_r}$. 例如,$\mathrm{Sq}^{[2,1,6]} = \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^6$.

定义 2.9：称数列 I 是**容许的**, 如果对每个 $k < r$ 都有 $i_k \geqslant 2i_{k+1}$. 当 $r = 1$ 时此条件自动成立, 此时也称 Sq^I 是容许的. 例如,$\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^6$ 不是容许的, 但 $\mathrm{Sq}^9\mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1$ 是容许的. 换句话说,Sq^I 是容许的当且仅当没有 Adem 关系可以应用于它.

定理 2.6 (Serre−Cartan 基)：$\{\mathrm{Sq}^I \mid I \text{ 是容许的}\}$ 构成 $\mathcal{A}_2$ 作为 $\mathbb{Z}/2$-模的一组基. 这组基称为 Serre−Cartan 基.

证明：Sq^I 的线性无关性可由所有满足次数不超过 n 的容许序列 I 对应的元素 $\mathrm{Sq}^I(u_n) \in H^*(\mathbb{K}(\mathbb{Z}/2,n);\mathbb{Z}/2)$ 的线性无关性推出. 而利用 Adem 关系可以证明 $\{\mathrm{Sq}^I : I \text{ 是容许的}\}$ 生成了作为 $\mathbb{Z}/2$-模的 $\mathcal{A}_2$. ■

例 2.2：由定理 2.6,Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2 = ((\mathcal{A})_n)_{n\geqslant 0}$ 的齐次分支 $(\mathcal{A}_2)_6$ 和 $(\mathcal{A}_2)_7$ 的基分别为

$$\mathrm{Sq}^6,\ \mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^1,\ \mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^2 \quad \text{和} \quad \mathrm{Sq}^7,\ \mathrm{Sq}^6\mathrm{Sq}^1,\ \mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^2,\ \mathrm{Sq}^4\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1.$$

定义 2.10：设 a 是 R 上分次代数 A 中的元素. 如果 a 可以表示为 $\sum_i a_i b_i$, 其中每个 a_i 和 b_i 的次数都低于 a 的次数, 则称 a 是**可分解的**；否则称 a 是**不可分解的**.

例如,Sq^6 是可分解的, 因为由 Adem 关系 $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^4 = \mathrm{Sq}^6 + \mathrm{Sq}^5\mathrm{Sq}^1$；$\mathrm{Sq}^1$ 是不

可分解的,Sq^2 也是不可分解的, 因为 $\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^1 = 0$.$\mathrm{Sq}^i$ 不可分解当且仅当 i 是 2 的幂[35].

定理 2.7：$\mathcal{A}_2$ 的不可分解元素集合 $\{\mathrm{Sq}^{2^i}: i \geqslant 0\}$ 生成了 $\mathcal{A}_2$[33].

证明：该命题的证明对 p=2 或 p 为奇素数情况都适用: 设 $i = i_0 + i_1 p + \cdots + i_k p^k$, 其中 $i_k \neq 0$. 令 $b = p^k$, $a = i - b$, 使得如果 i 不是 p 的幂, 则 $a < pb$ 且 $a, b > 0$. 如果我们能证明 $\binom{(p-1)b-1}{a}$（即 $j = 0$ 项）非零, 那么结论可由 Adem 关系得出. 事实上也确实如此:$(p-1)b-1 = p^{k+1}-1-p^k = (p-1)(1+p+\cdots+p^{k-1}+(p-2)p^k$ 的 p 进制展开以及 $a = i_0 + i_1 p + \cdots + (i_k - 1)p^k$. 于是有

$$\binom{(p-1)b-1}{a} = \binom{p-1}{i_0}\cdots\binom{p-1}{i_{k-1}}\binom{p-2}{i_k-1},$$

该乘积非零.

■

至此我们知道 $\mathcal{A}_2$ 是 $\mathbb{Z}/2$ 上的代数, 其非交换乘法由张量积代数中的乘积给出, 单位元在零次为恒等映射, 其余次数为零.

接下来我们将看到 Steenrod 代数还具有的 Hopf 代数的结构. 为说明 $\mathcal{A}_2$ 确为 Hopf 代数, 需要给出一个对角映射和一个增广映射, 使之满足 Hopf 代数的定义.

定义 2.11 ($\mathcal{A}_2$ 上的 Δ 运算)：定义 $\Delta: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$ 如下:

$$\Delta(\mathrm{Sq}^i) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^k \quad 和 \quad \Delta(\mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j) = \Delta(\mathrm{Sq}^i) \otimes \Delta(\mathrm{Sq}^j).$$

定理 2.8：上述 Δ 诱导了一个代数同态 $\Delta: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$. 这个 Δ 是余结合且余交换的.

定理 2.9：$\mathcal{A}_2$ 是 Hopf 代数.

证明：回顾 $\mathcal{A}_2$ 带有的四个运算:

乘法$\nabla: \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$,　$\nabla(\mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j) = \mathrm{Sq}^i \circ \mathrm{Sq}^j$；

单位$\eta: \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{A}_2$,　$\eta(1) = Sq_0$；

余乘法$\Delta: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$,　$\Delta(\mathrm{Sq}^i) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^k$；

增广运算$\varepsilon: \mathcal{A}_2 \to \mathbb{Z}_2$,　$\Delta(\mathrm{Sq}^i) = \begin{cases} 1, & 如果 i = 0, \\ 0, & 否则. \end{cases}$. 欲说明 $\mathcal{A}_2$ 是 Hopf 代数, 只需验证定义 2.7 中的四个条件:

（1）$(\mathcal{A}_2, \nabla, \eta)$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-代数；

$$对于任意\ i, j\ 都有: \quad (\mathrm{Sq}^i \circ \mathrm{Sq}^j) \circ \mathrm{Sq}^k = \mathrm{Sq}^i \circ (\mathrm{Sq}^j \circ \mathrm{Sq}^k),$$

$$\text{对于任意 } n \text{ 都有:}\quad \mathrm{Sq}^0 \circ \mathrm{Sq}^n = \mathrm{Sq}^n = \mathrm{Sq}^n \circ \mathrm{Sq}^0$$

因此（1）成立.

（2）$(\mathcal{A}_2, \Delta, \varepsilon)$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-余代数；对任意生成元 Sq^n,

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(\mathrm{Sq}^n) = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \sum_{i+j=n} \mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j = \sum_{i+j=n} \sum_{k+l=i} \mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{Sq}^l \otimes \mathrm{Sq}^j,$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(\mathrm{Sq}^n) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \sum_{i+j=n} \mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j = \sum_{i+j=n} \sum_{k+l=j} \mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{Sq}^l.$$

因此 $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(\mathrm{Sq}^n) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(\mathrm{Sq}^n)$. 结合定理 2.8 即得（2）成立.

（3）复合映射 $\eta \circ \varepsilon$ 和 $\varepsilon \circ \eta$ 在零次上是恒等映射；

由定义直接得.

（4）下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & \mathcal{A}_2 \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \\
\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes A \otimes \mathcal{A}_2 \arrow[rr, "1\otimes T\otimes 1"'] & & \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \arrow[u, "\nabla\otimes\nabla"']
\end{tikzcd}$$

欲证此图交换, 我们取左上角的一个元素 $\mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j$, 它沿着上面的边走到右上角得到 $\sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} (\mathrm{Sq}^{i-k}\mathrm{Sq}^{j-l}) \otimes (\mathrm{Sq}^k \mathrm{Sq}^l)$, 另一条路来说, 它沿着左-下来到右下角得到 $\sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^{j-l} \otimes \mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{Sq}^l$, 由于

$$\nabla \otimes \nabla\Big(\sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^{j-l} \otimes \mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{Sq}^l\Big) = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} (\mathrm{Sq}^{i-k}\mathrm{Sq}^{j-l}) \otimes (\mathrm{Sq}^k \mathrm{Sq}^l).$$

因此我们得到该图交换. 将上述过程画图表示的话就是下图.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j \arrow[r, mapsto, "\nabla"] \arrow[d, mapsto, "\Delta\otimes\Delta"'] & \mathrm{Sq}^i \mathrm{Sq}^j \arrow[r, mapsto, "\Delta"] & \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} (\mathrm{Sq}^{i-k}\mathrm{Sq}^{j-l}) \otimes (\mathrm{Sq}^k \mathrm{Sq}^l) \\
\sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{Sq}^{j-l} \otimes \mathrm{Sq}^l \arrow[rr, mapsto, "1\otimes T\otimes 1"'] & & \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes \mathrm{Sq}^{j-l} \otimes \mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{Sq}^l \arrow[u, mapsto, "\nabla\otimes\nabla"']
\end{tikzcd}$$

至此, 我们说明了 $\mathcal{A}_2$ 具有 Hopf 代数结构, 事实上 $\mathcal{A}_p$ 也具有 Hopf 代数结构, 且证明思路与上文陈述的 $\mathcal{A}_2$ 的证明思路类似. 这一部分在 Milnor 在 1958 年曾给出细致讨论[20].

至此, 本章对于经典上同调理论上的 Steenrod 运算的相关介绍就到此结束. 下一章, 我们将进入拓扑 K 理论的领域, 去了解拓扑 K 理论的相关背景和它上面的运算, 帮助我们更深地理解不同理论上运算的共性与本质特征, 为我们研究运算及其应用提供了不同的视角. 比如本章的 Steenrod 运算和下一章要介绍的 Adams 运算

同属所在理论上的加性运算. 这也启发我们研究更通俗意义上的理论上的加性运算所具备的共同性质、特征及本质信息. 在对类似运算产生深刻理解后再回过头来研究 Steenrod 运算, 我们将会有更深的体会.

■

第 3 章　拓扑 K 理论上的幂运算

这一章我们将围绕拓扑 K 理论上的幂运算展开, 用四个小节的篇幅分别介绍拓扑 K 理论的起源发展及相关概念、拓扑 K 理论上幂运算的构造及性质, 还有如何利用对称群表示环上元素与拓扑 K 理论上运算的对应来构造经典运算（如 Adams 运算）, 最后引入 λ-环的概念帮助我们以更高的视角理解上同调理论上的运算及运算间的决定关系.

3.1　拓扑 K 理论简介

1957 年 Grothendieck 在证明 Riemann-Roch 定理时有意识地对代数簇上的向量丛同构类构成的半群进行群化操作, 构造了 K 群. 紧接着,1960 年,Atiyah 和 Hirzebruch 将 Grothendieck 构造中的代数簇换成紧拓扑空间 X, 并发现此时 K(X) 可以看作一个交换环. 同时, 作为一个函子而言,K(・) 满足上同调公理, 于是 K(・) 就成为了人们发现的第一个广义上同调理论. 我们将其称为拓扑 K 理论.

以下是关于拓扑 K 理论的详细介绍:

对于 X 上的两个向量丛 E_1,E_2 来说, 如果 $E_1 \oplus \epsilon^n \cong E_2 \oplus \epsilon^n$, 则称它们是**稳定同构**的, 记为 $E_1 \sim_s E_2$, 其中 ϵ^n 是 n 维平凡丛. 由 $\sim_s$ 的定义可以直接得到 $\sim_s$ 满足自反性, 对称性和传递性, 因此 $\sim_s$ 是一个等价关系. 在此基础上, 我们定义拓扑空间 X 上向量丛同构类的加法 $E_1 + E_2 := E_1 \oplus E_2$,（有时我们会把 E 的同构类也记为 E, 具体含义视语境而定）. 该加法满足结合律、交换律, 且有单位元 ϵ^0. 但是目前只有 ϵ^0 有其自身的逆, 因此 x 上向量丛的同构类仅构成半群. 对这个半群进行群化操作: 对所有 E 添加形式逆 $-E$, 并定义 $E_1 - E_1' = E_2 - E_2'$ 如果 $E_1 + E_2' \sim_s E_2 + E_1'$. 将添加进全部元素的逆元后的群记为 $K(X)$. 除了这种方式外, 我们还可以通过考虑 X 上的丛构成的复形, 并在这些复形上定义合适的等价关系来构造我们的拓扑 K 理论, 这部分内容可以参考 Atiyah 和 Segal 所写的 K 理论相关著作[9] [26].

以上是由稳定同构关系构造出的 $K(X)$, 实际上, 我们还有一个类似的构造 $\tilde{K}(X)$, 这两个构造有着密切的联系.

如果对于某些 m 和 n 有 $E_1 \oplus \epsilon^m \cong E_2 \oplus \epsilon^n$, 那么我们就说 $E_1 \sim E_2$. 同样,~ 也是一个等价关系, 还是将向量丛同构类间的直和运算当作向量丛同构类间的的加法运算. 因为对任意 E, 都存在向量丛 $E^\perp$ 使得 $E \oplus E^\perp \cong \epsilon^n \sim \epsilon^0$ 对某个 n 成立, 所以 X 上所有向量丛的等价类的集合自动构成一个阿贝尔群. 这个群就是我们

上面说的 $\tilde{K}(X)$.

命题 3.1： $K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$

证明： 设 E 是 $K(X)$ 中的一个元素, 由定义可知存在 E_1,E_2 使得 E=$E_1 - E_2$=$(E_1 + E_2^{\perp}) - (E_2 + E_2^{\perp})$=$(E_1 + E_2^{\perp}) - \epsilon^n$.

定义秩同态 $r : K(X) \to \mathbb{Z}$ 如下: 对于 $x = [E - \epsilon^n] \in K(X)$, 令 $r(x) = \mathrm{rank}(E) - n$, 其中 $\mathrm{rank}(E)$ 是 E 的纤维维数. 由于若 $E - \epsilon^n = F - \epsilon^m$ 则存在 t 使得 $E \oplus \epsilon^{m+t} \cong F \oplus \epsilon^{n+t}$, 两边取秩得 $\mathrm{rank}(E) + m + t = \mathrm{rank}(F) + n + t$, 故 $\mathrm{rank}(E) - n = \mathrm{rank}(F) - m$, 因此 r 是良定义的. 因为 $r([\epsilon^k - \epsilon^0]) = k$, 所以 r 是群同态且满射.

考虑自然映射 $\varphi : K(X) \to \tilde{K}(X)$, 其中 $\varphi([E - \epsilon^n]) = [E]$. 若 $E - \epsilon^n = F - \epsilon^m$, 则存在 t 使 $E \oplus \epsilon^{m+t} \cong F \oplus \epsilon^{n+t}$, 故 $E \sim F$, 从而 φ 良定义.

再定义 $\psi : \tilde{K}(X) \to K(X)$, 令 $\psi([E]) = [E - \epsilon^{\mathrm{rank}(E)}]$. 为证良定义, 设 $[E] = [F]$, 即存在 p, q 使 $E \oplus \epsilon^p \cong F \oplus \epsilon^q$, 则 $\mathrm{rank}(E) + p = \mathrm{rank}(F) + q$. 记 $r_E = \mathrm{rank}(E)$,$r_F = \mathrm{rank}(F)$, 则 $r_F = r_E + p - q$. 由同构 $E \oplus \epsilon^p \cong F \oplus \epsilon^q$ 两边同时加 $\epsilon^{r_E + t}$（t 待定）得 $E \oplus \epsilon^{p + r_E + t} \cong F \oplus \epsilon^{q + r_E + t}$. 而我们需要证明存在某个 k 使得 $E \oplus \epsilon^{r_F + k} \cong F \oplus \epsilon^{r_E + k}$. 取 $k = t + q$, 则左边为 $E \oplus \epsilon^{r_E + p - q + t + q} = E \oplus \epsilon^{r_E + p + t}$, 右边为 $F \oplus \epsilon^{r_E + t + q}$, 这正是上面同构式（注意 $q + r_E + t = r_E + t + q$）. 因此 ψ 良定义.

现在考虑复合: 从一个方向上来说, 对任意 $[E] \in \tilde{K}(X)$,$\varphi(\psi([E])) = \varphi([E - \epsilon^{r_E}]) = [E]$, 故 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{K}(X)}$. 从另一个方向上来说, 对任意 $x = [E - \epsilon^n] \in \ker r$, 即 $r(x) = 0$, 故 $\mathrm{rank}(E) = n$, 于是 $\psi(\varphi(x)) = \psi([E]) = [E - \epsilon^n] = x$, 故 $\psi \circ \varphi|_{\ker r} = \mathrm{id}_{\ker r}$. 因此 $\ker r$ 与 $\tilde{K}(X)$ 通过 φ 和 ψ 互逆, 即 $\ker r \cong \tilde{K}(X)$.

为了构造正合列, 我们定义 $s : \mathbb{Z} \to K(X)$ 为 $s(k) = [\epsilon^k - \epsilon^0]$（其中 ϵ^0 是零维平凡丛, 即单位元）, 则 $r(s(k)) = k$, 且 s 是单射. 因此我们有正合序列

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(X) \xrightarrow{\psi} K(X) \xrightarrow{r} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

且 s 是 r 的一个右逆, 故该正合列分裂, 因此有 $K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$.

■

除了加法, 我们还可以在 $K(X)$ 上定义乘法, 让它成为一个环:$(E_1 - E_1')(E_2 - E_2') = E_1 \otimes E_2 - E_1 \otimes E_2' - E_1' \otimes E_2 + E_1' \otimes E_2'$. 这一乘法满足结合律、交换律以及分配律. 因此 $K(X)$ 是一个交换环, 其单位元为 ϵ^1.

有一个思路可以加深我们对 $\tilde{K}(X)$ 的理解: 从 X 中取一点 x_0, 通过限制映射将 X 上的向量丛送到它在 x_0 上的纤维, 以这样的方式来定义映射 $K(X) \longrightarrow K(x_0)$. 这一映射显然是环同态, 它的核（kernel）就是 $\tilde{K}(X)$. 显然 $\tilde{K}(X)$ 是 $K(X)$ 的一个理想, 并且自身也是一个环.

知道它们都是环后,$K(\cdot)$ 和 $\tilde{K}(\cdot)$ 都是是从拓扑空间范畴到交换环范畴的反变

函子. 如果连续映射 f 和 g 满足 $f \simeq g : X \to Y$, 那么 $f^* = g^* : K(Y) \to K(X)$.

定义 3.1 (外部积)：两个不同空间上向量丛同构类的外部积按如下方式定义: 设 p_1 和 p_2 是 $X \times Y$ 到 X 和 Y 的投影. 外部积 $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$,$\mu(a \otimes b) = p_1^*(a)p_2^*(b)$. μ 是一个环同态, 因为环的张量积还是环, 其乘法定义为 $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$, 并且

$$\mu((a \otimes b)(c \otimes d)) = \mu(ac \otimes bd) = p_1^*(ac)p_2^*(bd) = p_1^*(a)p_1^*(c)p_2^*(b)p_2^*(d)$$

$$= p_1^*(a)p_2^*(b)p_1^*(c)p_2^*(d) = \mu(a \otimes b)\mu(c \otimes d).$$

普通上同调中的外部积被称为” 叉积”, 并记作 $a \times b$, 但这个符号可能会跟笛卡尔积混淆, 因此我们有时用符号 $a * b$ 作为 $\mu(a \otimes b)$ 的简写.

与在 $K(X)$ 上定义的外积对应, 我们在 $\tilde{K}(X)$ 上也定义了约化积, 也由投影映射的诱导表示.

由此我们可以证明乘积定理, 再以乘积定理为基础证明 Bott 周期性, 最后定义 Adams 运算.

定理 3.1 (基本乘积定理)：对于任意紧致 Hausdorff 空间 X. 同态

$$\mu : K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H]/(H-1) \to K(X \times S^2)$$

是一个同构

证明：证明详见 Hatcher 在关于向量丛与 K 理论书籍[16] 的第二章定理 2.2 ■

定理 3.2 (Bott 周期定理)：对于任意的紧 Hausdorff 空间 X , 同态 $\beta : \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^2X), \beta(a) = (H-1) * a$ 是一个同构[17].

证明：映射 β 是复合映射

$$\tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^2X)$$

其中第一个映射定义为 $a \mapsto (H-1) \otimes a$. 因为 $K(S^2) \cong \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$, 所以第一个映射直接就是同构. 第二个映射是外积, 由乘积定理得其也为同构. 因此复合映射 β 就是同构, 故得证. ■

推论 3.1：$\tilde{K}(S^{2n+1}) = 0$ 且 $\tilde{K}(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$, 由 n 重积 $(H-1) * \cdots * (H-1)$ 生成.

证明：因为 $\tilde{K}(S^1) = 0$ 且 $\tilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$, 所以由 Bott 周期性直接得此推论.

■

我们现在知道了 $K(\cdot)$ 和 $\tilde{K}(\cdot)$ 的很多关系和性质, 但是之所以它们在代数拓扑中那么重要的最关键原因我们还没有提及, 那就是它们具备上同调函子的很多性质. 因此, 接下来我们将说明如何把它们看成上同调理论, 或者说如何把我们认识的 $K(\cdot)$ 和 $\tilde{K}(\cdot)$ 扩展到其它阶数上去. 为了这一目的, 让我们先回到正合列上来.

命题 3.2：如果 X 是紧 Hausdorff 空间且 $A \subset X$ 是一个闭子空间, 则包含映射和商映射 $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$ 诱导的同态 $\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$ 在 $\tilde{K}(X)$ 处正合.

证明：证明正合, 即证明 $\operatorname{Im} q^* = \operatorname{Ker} i^*$, 也即证明两者两个方向的包含关系都成立.

$\operatorname{Im} q^* \subset \operatorname{Ker} i^*$ 是显然的: 它等价于 $i^* q^* = 0$. 由于 qi 等于复合映射 $A \to A/A \to X/A$ 且 $\tilde{K}(A/A) = 0$, 因此有 $i^* q^* = 0$.

$\operatorname{Ker} i^* \subset \operatorname{Im} q^*$: 假设向量丛 $p : E \to X$ 在 A 上的限制是稳定平凡的. 给 E 加上一个平凡丛, 我们可以假设 E 本身在 A 上是平凡的. 选取一个平凡化 $h : p^{-1}(A) \to A \times \mathbb{C}^n$, 令 E/h 为 E 以如下方式粘合后的商空间: 对于 $x, y \in A$, 将 $h^{-1}(x, v)$ 与 $h^{-1}(y, v)$ 等同. 于是有一个诱导的投影 $E/h \to X/A$. 为了说明这是一个向量丛, 我们需要在点 A/A 的一个邻域上找到局部平凡化.

欲说明由于 E 在 A 上是平凡的, 它在 A 的某个邻域上也是平凡的. 在大多数情况下, 这是因为存在一个邻域形变收缩到 A, 所以 E 在该邻域上的限制同构于通过收缩映射拉回的 $p^{-1}(A)$, 因此它是平凡的. 在没有这样的形变收缩时, 可以运用下面的方式说明.E 在 A 上的一个平凡化决定了截面 $s_i : A \to E$, 它们构成了 A 上的纤维的一组基. 取 A 在 X 中的一组开覆盖 $\{U_j\}$, 使得 E 在每个 U_j 上平凡. 通过局部平凡化, 每个截面 s_i 可视为从 $A \cap U_j$ 到某固定纤维的映射, 于是由 Tietze 扩张定理, 我们可以得到扩张成 s_i 的截面 $s_{ij} : U_j \to E$. 设 $\{\varphi_j, \varphi\}$ 是 X 的开覆盖 $\{U_j, X - A\}$ 的分解, 则 $\sum_j \varphi_j s_{ij}$ 给出了 s_i 到整个 X 上的扩张. 由于这些截面在 A 上的所有纤维中都构成基, 所以它们在全体邻近纤维中也必构成一组基. 具体地说, 在 U_j 上, 扩张后的 s_i 可视为一个矩阵函数, 它在 A 的每点具有非零行列式, 因此在邻近点也有非零行列式.

于是我们有了 E 在 A 的一个邻域 U 上的平凡化 h. 这诱导出 E/h 在 U/A 上的一个平凡化, 所以 E/h 是一个向量丛. 剩下只需验证 $E \cong q^*(E/h)$. 在下面的交换图中, 商映射 $E \to E/h$ 在纤维上是同构, 因此该映射和 p 一起给出了一个同构 $E \cong q^*(E/h)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & E/h \arrow[d] \\ X \arrow[r, "q"] & X/A \end{tikzcd}$$

■

引理 3.1：如果拓扑空间 X 的子集 A 可缩, 那么商映射 $X \to X/A$ 诱导了双射 $q^* : Vect^n(X/A) \to Vect^n(X)$.

由命题 3.2, 我们知道对于紧 Hausdorff 空间对 (X,A), 有以下这个正和

列:$\tilde{K}(S^2X) \to \tilde{K}(S^2A) \to \tilde{K}(S(X/A)) \to \tilde{K}(SX) \to \tilde{K}(SA) \to \tilde{K}(X/A) \to \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(A)$. 设 $\tilde{K}^{-n}(X) := \tilde{K}(S^nX)$ $\tilde{K}^{-n}(X,A) := \tilde{K}(S^n(X/A))$, 则有正合列

$$\tilde{K}^{-2}(X) \to \tilde{K}^{-2}(A) \to \tilde{K}^{-1}(X,A) \to \tilde{K}^{-1}(X) \to \tilde{K}^{-1}(A) \to \tilde{K}^{0}(X,A) \to \tilde{K}^{0}(X) \to \tilde{K}^{0}(A)$$

这里选择负指标是为了使该正合列中的边界映射像平常的上同调理论中一样增加维数. 由 Bott 周期性可以进一步提升维数, 并把第二行的长正合列”卷” 成一个六项的周期正合列. 同时, 令 $\tilde{K}^{2i}(X) = \tilde{K}(X)$ 和 $\tilde{K}^{2i+1}(X) = \tilde{K}(SX)$., 我们把 $\tilde{K}^n$ 的定义推广到了正 n . 于是我们得到了这样的正合列:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}^0(X,A) \arrow[r] & \tilde{K}^0(X) \arrow[r] & \tilde{K}^0(A) \arrow[d] \\
\tilde{K}^1(A) \arrow[u] & \tilde{K}^1(X) \arrow[l] & \tilde{K}^1(X,A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

通过把外积 $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y)$ 中的 X 和 Y 替换为 S^iX 和 S^jY, 我们得到了 $\tilde{K}^i(X) \otimes \tilde{K}^j(Y) \to \tilde{K}^{i+j}(X \wedge Y)$. 如果我们定义 $\tilde{K}^*(X) := \tilde{K}^0(X) \oplus \tilde{K}^1(X)$, 那么就给出了 $\tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(Y) \to \tilde{K}^*(X \wedge Y)$.. 将 $(X \times Y)/(X \times B \cup A \times Y) = X/A \wedge Y/B$. 用在 $\tilde{K}(\Sigma^i(X/A)) \otimes \tilde{K}(\Sigma^j(Y/B)) \to \tilde{K}(\Sigma^{i+j}(X/A \wedge Y/B))$ 上面, 我们就得到了上面乘积公式的相对形式: $\tilde{K}^*(X,A) \otimes \tilde{K}^*(Y,B) \to \tilde{K}^*(X \wedge Y, X \times B \cup A \times Y)$,

如果我们把外积 $\tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(X) \to \tilde{K}^*(X \wedge X)$ 结合上由对角映射 $X \to X \wedge X, \quad x \mapsto (x,x)$ 诱导的映射 $\tilde{K}^*(X \wedge X) \to \tilde{K}^*(X)$, 就得到了 $\tilde{K}^*(X)$ 上的乘法运算, 于是 $\tilde{K}^*(X)$ 就成为环（像其它上同调理论中的上同调环一样）. 不难验证这一定义是 $\tilde{K}^0(X)$ 上的环结构的扩张.

以下的两个例子足以体现拓扑 K 理论作为广义上同调理论的优美性质.

例 3.1：对于 $\alpha \in \tilde{K}^i(X)$ 和 $\beta \in \tilde{K}^j(X)$, 有 $\alpha\beta = (-1)^{ij}\beta\alpha$.

例 3.2：下图的正合列是 $\tilde{K}^*(X)$-模的正合列, 三者间的映射是 $\tilde{K}^*(X)$-模同态.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}^*(X,A) \arrow[rr] & & \tilde{K}^*(X) \arrow[dl] \\
& \tilde{K}^*(A) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

至此, 我们介绍了拓扑 K 理论的定义, 以及它何以成为广义上同调理论. 特别是对于拓扑 K 理论作为广义上同调理论所满足的同伦公理、正合公理以及 $\tilde{K}^*(X)$ 环结构, 我们都做出了详细介绍. 在搭好拓扑 K 理论的框架后, 在接下来的 3 节中, 我们将在构造拓扑 K 理论上全幂运算的基础上利用表示论手段进一步构造出拓扑 K 理论上的 Adams 运算等经典运算, 以揭示它们的性质和关系, 同时体现 K(X) 的 $\lambda-$ 环结构.

3.2　拓扑 K 理论上的幂运算

在拓扑 K 理论中, 向量丛除了进行直和与张量积运算外, 还可以做对称幂运算、外幂运算以及更一般的其它运算. 由于拓扑空间的 m 次张量幂天然带有对称群 Σ_m 的作用, 因此这些运算最自然的统一对象不是单个对称幂运算 σ^m 或外幂运算 λ^m, 而是全幂运算. 我们将借鉴 Rezk 的思路, 先构造全幂运算, 再从利用对称群表示环中元素与拓扑 K 理论运算的对应的角度构造出对称幂运算、外幂运算和 Adams 运算. 我们将看到这几个运算与全幂运算之间的密切联系. 最后还会介绍 K(X) 的 λ-环结构.

考虑复向量丛 $V \to X$; 将 X 看作有限 CW 复形. 向量空间的张量积在乘积空间 $X^{\times m}$ 上诱导出一个向量丛, 记作 $V^{\boxtimes m}$, 称为**外张量积**. 向量丛 $V^{\boxtimes m}$ 明显有 Σ_m 作用, 与 $X^{\times m}$ 上的作用相容. 因此, 从 $V^{\boxtimes m} \to X^{\times m}$ 是一个 Σ_m-等变丛.

定义 3.2：上述由向量丛 V 得到外张量积构成的向量丛的过程实际上可以看作 K 理论间的运算, 也就是 m **次幂运算** $\mathcal{P}_m : K(X) \to K_{\Sigma_m}(X^{\times m})$.

设 $\delta : X \to X^{\times m}$ 为对角嵌入. 与 $\mathcal{P}_m$ 复合就得到了 P_m, 即 $P_m := \mathcal{P}_m \circ \delta^*$.

$$K(X) \xrightarrow{\mathcal{P}_m} K_{\Sigma_m}(X^{\times m}) \xrightarrow{\delta^*} K_{\Sigma_m}(X),$$

由于 Σ_m 在 X 的对角拷贝上平凡作用, 存在一个自然映射（这是一个同构）:

$$K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R\Sigma_m \to K_{\Sigma_m}(X)$$

定义 3.3：G 是一个群, **表示环 RG** 指的是 G 的有限维表示的同构类的形式和构成的环. 出于与 K(X) 同样的原因,RG 是也是环.

例 3.3：设 $m = 2$. 那么 $R\Sigma_2 \cong \mathbb{Z}[s]/(s^2-1)$, 其中 s 代表符号表示. 映射 $P_2 : K(X) \to K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[s]/(s^2-1)$ 分解为

$$P_2(x) = \sigma^2(x) \cdot 1 + \lambda^2(x) \cdot s,$$

其中 σ^2 是第二对称幂运算,λ^2 是第二外幂运算.

一般地, 由于 $R\Sigma_m$ 有一组由不可约表示 V_π 构成的基, 所以我们可以写

$$P_m(x) = \sum \phi_\pi(x) \cdot [V_\pi].$$

这定义了每个不可约表示 π 的一个函数 $\phi_\pi : K(X) \to K(X)$. 注意 $\phi_1(x) = \sigma^m(x)$, $\phi_{\mathrm{sgn}}(x) = \lambda^m(x)$.

更一般地, 如果 G 是一个带着同态 $G \to \Sigma_m$ 的有限群, 那么我们可以通过这样映射的复合来定义 $\mathcal{P}_G : K(X) \to K_G(X^{\times m})$:

$$K(X) \xrightarrow{\mathcal{P}_m} K_{\Sigma_m}(X^{\times m}) \xrightarrow{\mathrm{res}} K_G(X^{\times m}).$$

为了更好地描述幂运算相关的性质, 接下来我们要介绍两个新的概念: 圈积 (wreath product) 和转移（transfer）.

定义 3.4 (圈积)：给定一个群 G, 用 $G \wr \Sigma_m$ 表示" 圈积", 圈积由如下正合列定义:

$$1 \to G^m \to G \wr \Sigma_m \to \Sigma_m \to 1$$

注意 $G \times \Sigma_m \subset G \wr \Sigma_m$.

若 G 带有同态: $G \to \Sigma_n$, 则存在从圈积出发的同态 $G \wr \Sigma_m \to \Sigma_{mn}$, 其构造如下: 由于 G 作用在 $\underline{n}$ 上, 我们可以让 G^m 作用在 $\underline{n} \times \underline{m}$ 上, 其中第 i 个的 G 作用在 $\underline{n} \times \{i\}$ 上. 让 Σ_m 通过 $\underline{m}$ 作用在 $\underline{n} \times \underline{m}$ 上, 我们就得到了 $G \wr \Sigma_m$ 的一个作用.

因此我们可以在 G-等变 K 理论上定义一个幂运算:

$$\mathcal{P}_m : K_G(X) \to K_{G\wr\Sigma_m}(X^{\times m}).$$

将这一幂运算进一步限制到 X 和 G 的 m 次乘积上, 就得到新的映射 P_m:

$$K_G(X) \xrightarrow{\mathcal{P}_m} K_{G\wr\Sigma_m}(X^{\times m}) \xrightarrow{\text{res}} K_{G\times\Sigma_m}(X) \cong K_G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R\Sigma_m.$$

性质 1 (全幂运算的性质)：我们将列出 $\mathcal{P}_m$ 运算的一些性质, 并给出一些理解（事实上, 顺着这些性质就可以推出 P_m 的类似性质）.

(a)考虑 $\{e\} \to \Sigma_m$, 则有 $\mathcal{P}_{\{e\}}(x) = x^{\boxtimes m}$. 即复合映射

$$K(X) \to K_{\Sigma_m}(X^{\times m}) \xrightarrow{\text{res}} K(X^{\times m})$$

是 m 次外幂运算. 因此 P_m 限制到平凡群上就是通常的 m 次幂运算.

(b)运算 $\mathcal{P}_m$ 是可乘的, 即 $\mathcal{P}_m(xy) = \mathcal{P}_m(x)\mathcal{P}_m(y)$. 更一般地,$\mathcal{P}_m$ 与外 Künneth 乘积交换.（由向量空间 V 和 W 的自然同构 $(V \otimes W)^{\otimes m} \cong V^{\otimes m} \otimes W^{\otimes m}$ 直接推出.）

(c)$\mathcal{P}_m(1) = 1$.

(d)以下图表交换

$$\begin{tikzcd}
K(X) \arrow[r, "\mathcal{P}_{mn}"] \arrow[d, "\mathcal{P}_n"'] & K_{\Sigma_{mn}}(X^{mn}) \arrow[d, "res^{\Sigma_{mn}}_{\Sigma_n\wr\Sigma_m}"] \\
K_{\Sigma_n}(X^n) \arrow[r, "\mathcal{P}_m"'] & K_{\Sigma_n\wr\Sigma_m}(X^{mn})
\end{tikzcd}$$

这跟 $(V^{\otimes n})^{\otimes m} \cong (V^{\otimes mn})$ 有关

(e)有

$$\mathcal{P}_m(0) = \begin{cases} 1 & 若 m = 0, \\ 0 & 若 m > 0. \end{cases}$$

(f)有

$$\mathcal{P}_m(x+y)=\sum_{i+j=m}\operatorname{ind}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}^{\Sigma_m}(\mathcal{P}_i(x)\boxtimes\mathcal{P}_j(y)).$$

在了解到全幂运算的基本性质后, 下面我们将对比 m 次幂运算与幂函数的性质, 方便大家直观了解到全幂运算的性质的内涵.

K 理论上的 m 次幂运算 $\mathcal{P}_m$	数域上的幂指数运算 $f_m(x)=x^m$	直观公式
$\mathcal{P}_{\{e\}}(x)=x^{\boxtimes_m}$	$f_m(x)=x^m$	$x^m=x^m$
$\mathcal{P}_m(xy)=\mathcal{P}_m(x)\mathcal{P}_m(y)$	$f_m(xy)=x^my^m$	$(xy)^m=x^my^m$
$\mathcal{P}_m(1)=1$	$f_m(1)=1$	$1^m=1$
$\left(\operatorname{res}_{\Sigma_n\wr\Sigma_m}^{\Sigma_{mn}}\right)\circ\mathcal{P}_{mn}=\mathcal{P}_m\circ\mathcal{P}_n$	$f_{mn}=f_m\circ f_n$	$x^{mn}=(x^n)^m$
$\mathcal{P}_m(0)=1\ (m=0),\ \mathcal{P}_m(0)=0\ (m>0)$	$f_m(0)=0$ 对所有 m	$0^m=0$
$\mathcal{P}_m(x+y)=\sum_{i+j=m}\operatorname{ind}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}^{\Sigma_m}\left(\mathcal{P}_i(x)\boxtimes\mathcal{P}_j(y)\right)$	$f_m(x+y)=\sum_{i=0}^m\binom{m}{i}x^iy^{m-i}$	$(x+y)^m=\sum_{i=0}^m\binom{m}{i}x^iy^{m-i}$

表 3-1　拓扑 K 理论上幂运算与普通幂函数性质的对比

事实上,$\mathcal{P}_m$ 的性质之所以能这么好, 很大程度上依赖于 $\otimes$ 的良好性质, 这一点在性质（b）、（d）、（f）中体现得尤为明显.

总的来说, 这些性质都围绕 $\mathcal{P}_m$ 的相容性展开, 有不同次数 $\mathcal{P}_m$ 之间的相容性,$\mathcal{P}_m$ 与环的运算之间的相容性等. 具体来说: （b）和（c）说明了 $\mathcal{P}_m$ 具有同态的性质.（b）体现 $\mathcal{P}_m$ 与环本身的乘法运算相容,（c）则体现 $\mathcal{P}_m$ 将乘法单位送到乘法单位. 与之对比,（e）、（f）则直接说明 $\mathcal{P}_m$ 本身不是环同态.（e）说明不同次数 $\mathcal{P}_m$ 将环内加法零元送到加法零元或乘法单位元.（f）说明了 $\mathcal{P}_m$ 作用后有很多混合项, 但这也为后续我们将这部分混合项商掉构造出真正的环同态提供了基础.（d）体现不同次数幂运算的关联性.

（e）的分类讨论的结果暗示了我们可以考虑将全部的 $\mathcal{P}_m$ 放在一起考虑, 因此我们把全部信息放在一起定义了 $\mathcal{P}$, 以展示 $\mathcal{P}_m$ 良好的整体性质.

定义 3.5：把所有 $\mathcal{P}_m$ 放在一起得到

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_m:K(X)\to\prod_{m\geqslant 0}K_{\Sigma_m}(X^m),$$

由性质（e）、（f）, 可直接得 $\mathcal{P}(0)=1,\mathcal{P}(x+y)=\mathcal{P}(x)\mathcal{P}(y)$. 如上面的表格所列, 我们看到 $\mathcal{P}_m$ 具备像幂函数一样的性质, 而现在定义出的 $\mathcal{P}$ 则表现出和指数函数一样的性质, 我们同样也把它们都列出来方便更直观地对比.

$$\mathcal{P}(0)=1, \qquad \mathcal{P}(x+y)=\mathcal{P}(x)\mathcal{P}(y).$$

$$e^0=1, \qquad e^{x+y}=e^x e^y.$$

性质（f）告诉我们 $\mathcal{P}_m$ 不是群同态, 在作加法时会多很多" 混合项". 因此, 接下来我们要构造转移理想, 为商掉" 混合项", 得到具备加法性的幂运算（甚至真正的环同态）做准备.

定义 3.6 (转移)：给定一个 G-空间的有限覆盖 $f: X\to Y$, 存在一个" 转移" 映射:

$$f_!: K(X)\to K(Y);$$

若 $V\to X$ 是一个 G-丛, 我们定义一个 G-丛 $f_!V\to Y$, 其纤维为

$$(f_!V)_y=\prod_{x\in f^{-1}(y)} V_x;$$

群 G " 对角地" 作用在空间上, 使得 g 把 $(v_x)_{x\in f^{-1}(y)}$ 送到 $(gv_{g^{-1}z})_z\in f^{-1}(gy)$. 考虑 G 的子群 H $\subset G$ 是, 那么就存在覆盖 $G\times_H X\to X$, 使得其诱导的诱导映射如下:

$$\mathrm{ind}_H^G: K_H(X)\cong K_G(G\times_H X)\xrightarrow{f_!} K_G(X),$$

特别地, 如果 $X=*$, 那这就是平常所说的的诱导映射 $RH\to RG$.

性质 2：转移映射具有如下性质.

(i) 转移是自然的, 即给一列覆盖 $X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} Z$, 有 $(gf)_!=g_!f_!$.

(ii) 给定 G-空间的覆盖 $f: X\to Y$, 再给一个一个 H-空间 Z, 我们有

$$(f\times 1_Z)_!(a\times c)=f_!(a)\times c,$$

其中 $a\in K_G(X)$,$c\in K_H(Z)$.

(iii) 给定拉回

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[h]{} & Y \end{array}$$

其中 f 和 f' 都是覆盖, 则有 $h^*f_!=(f')_!g^*$.

(iv) 给定覆盖 $f: X\to Y$, 我们有:

$$f_!(af^*(b))=f_!(a)b,$$

其中 $a \in K_G(X)$,$b \in K_G(Y)$.（此性质可由其他性质推出.）

定义 3.7 (真转移理想)：设 $I_{\mathrm{tr}} \subseteq K_{\Sigma_m}(X^m)$ 表示子群

$$I_{\mathrm{tr}} := \sum_{i+j=m,\ 0<i,j<m} \mathrm{Image}\left[\mathrm{ind}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}^{\Sigma_m} : K_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(X^m) \to K_{\Sigma_m}(X^m)\right].$$

转移的性质 (iv) 表明 I_{tr} 实际上是一个理想, 我们把它叫做**真转移理想**.

由幂运算的性质 (e) 和性质 (f) 直接得下列复合映射具备加法性:

$$\phi_1 : K(X) \xrightarrow{P_m} K_{\Sigma_m}(X^m) \to K_{\Sigma_m}(X^m)/I_{\mathrm{tr}}.$$

又因为质 (b) 和 (c) 已经说明了 P_m 具备乘法性, 因此这个复合映射就是环同态.

我们也可以由对角映射的拉回得到另一个转移理想:

$$I_{\mathrm{tr}} := \sum_{i+j=m,\ 0<i,j<m} \mathrm{Image}\left[\mathrm{ind}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}^{\Sigma_m} : K(X)\otimes R(\Sigma_i\times\Sigma_j) \to K(X)\otimes R\Sigma_m\right].$$

在这种情况下, 因为转移映射仅作用在表示环的分量上, 所有转移理想具有 $K(X)\otimes I'_{\mathrm{tr}}$ 的形式, 其中 $I'_{\mathrm{tr}} \subset R\Sigma_m$. 按这个方法, 我们复合上 $P_m = \mathcal{P}_m \circ \delta^*$, 同样得到环同态:

$$\phi_2 : K(X) \xrightarrow{P_m} K(X)\otimes R\Sigma_m \to K(X)\otimes (R\Sigma_m/I_{\mathrm{tr}}).$$

注意到, 因为存在这样的同伦拉回:

$$\begin{tikzcd}
(\Sigma_m/\Sigma_i\times\Sigma_j)\times X \arrow[r] \arrow[d] & (\Sigma_m/\Sigma_i\times\Sigma_j)\times X^m \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

由转移的性质 3, 可得交换图:

$$\begin{tikzcd}
K(X)\otimes R(\Sigma_i\times\Sigma_j) \arrow[d, "ind"'] & K_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(X^m) \arrow[l, "\delta^*"'] \arrow[d, "ind"] \\
K(X)\otimes R(\Sigma_m) & K_{\Sigma_m}(X^m) \arrow[l, "\delta^*"]
\end{tikzcd}$$

因此有映射 $\pi : K_{\Sigma_m}(X^m)/I_{\mathrm{tr}} \to K(X)\otimes (R\Sigma_m/I_{\mathrm{tr}})$.

于是我们有这个图（没有说是交换图）:

$$\begin{tikzcd}
 & K_{\Sigma_m}(X^m)/I_{\mathrm{tr}} \arrow[dd, "\pi"] \\
K(X) \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & \\
 & K(X)\otimes (R\Sigma_m/I_{\mathrm{tr}})
\end{tikzcd}$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 都是环同态, 那很自然地我们就会问 π 是同构吗, 什么情况下是呢？

事实上, 当 X 是有限离散空间的时候,π 是同构.

例 3.4：设 $m = 2$. 则 $R\Sigma_2 \approx \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z} \cdot s$, 其中 1 和 s 分别代表平凡表示和符号表示. 那么 $R(\Sigma_1 \times \Sigma_1) \to R\Sigma_2$ 的像是元素 $1 + s$ 生成的理想. 因此 $R\Sigma_2/I_{\mathrm{tr}} \approx \mathbb{Z}$.

根据例 3.3, 我们知道幂运算表达式为 $P_2(x) = \sigma^2(x) \cdot 1 + \lambda^2(x) \cdot s.$, 因此它在 $K(X) \otimes R\Sigma_2/I_{\mathrm{tr}}$ 中的像就是 $\sigma^2(x) - \lambda^2(x)$. 它也是我们在下一节要介绍的 Adams 运算 $\psi^2(x)$.

3.3　从表示论到拓扑 K 理论上的经典运算

在这一节里, 我们将利用代数手段详细介绍 K 理论上除了幂运算外的其它经典运算（如对称幂运算、外幂运算以及 Adams 幂运算）的构造. 主要利用了对称群表示环上元素与拓扑 K 理论上运算的对应关系.

我们先来介绍表示论的部分内容. 定义记号:

$$R^*(\Sigma_m) := \mathrm{Hom}_Z(R(\Sigma_m), Z).$$

其中 RG 表示有限群 G 的复表示环. 记 $R_*G := \mathrm{hom}_{\mathbb{Z}}(RG, \mathbb{Z})$ 为所有群同态构成的集合. 令 $R_* := \oplus_{m\geqslant 0} R_*\Sigma_m$. 则 R_* 是一个交换环, 其乘法 $R_*\Sigma_k \otimes R_*\Sigma_l \to R_*\Sigma_{k+l}$ 由限制映射 $R\Sigma_{k+l} \to R(\Sigma_k \times \Sigma_l) \cong R\Sigma_k \otimes R\Sigma_l$ 的对偶给出.

接下来我们将描述环 R_* 的结构（这一部分参考 Atiyah 关于 K 理论上幂运算的书籍[8]）

记 σ_m 为 $R_*\Sigma_m$ 中将表示 V 打到 $\dim(V^{\Sigma_m})$ 的元素, λ_m 为 $R_*\Sigma_m$ 中将表示 V 打到 $\dim(\mathrm{hom}(\mathrm{sgn}, V))$ 的元素.

我们的第一个任务是证明下列命题:

命题 3.3：存在同构 $R_* \cong \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots] \cong \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots]$.

为证明这一同构, 我们还需要一些其它的记号. 令 $\mathrm{Sym}_{m,r}[t] \subset \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_r]$ 表示整系数多项式环上以 $t_1, \cdots, t_r$ 为变元的 m 次对称齐次多项式构成的集合, 其中 $r \geqslant m$. 若 $r \geqslant m$, 则无论 r 多大, 该群都同构. 这是因为当 $r \geqslant m$ 时,$t_{r+1} \to 0$ 的投影映射给出了 $\mathrm{Sym}_{m,r+1}[t] \to \mathrm{Sym}_{m,r}[t]$ 的同构. 我们把当 $r \to \infty$ 时的极限记为 $\mathrm{Sym}_m[t]$.

令 $\{V_\pi\}$ 表示 Σ_m 的全体不可约表示构成的集合；则 $\{[V_\pi]\}$ 是 $R\Sigma_m$ 的一组基. 值得注意的是, 任何 Σ_m-表示 W 均可写为: $W \cong \oplus_\pi \mathrm{hom}_{\Sigma_m}(V_\pi, W) \otimes V_\pi$.

我们定义映射 $\Delta : R_*\Sigma_m \to \mathrm{Sym}_m[t]$ 如下:

$$\Delta(\alpha) = \sum_\pi \mathrm{Trace}[\mathrm{hom}_{\Sigma_m}(V_\pi, T^{\otimes m})] \cdot \alpha([V_\pi]),$$

其中 $T=(t_1,\cdots,t_r)$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的对角矩阵, 而 $T^{\otimes m}$ 表示 $(\mathbb{C}^r)^{\otimes m}$ 上诱导的线性自同态.

命题 3.5 的证明由以下引理推出.

引理 3.2：映射 $\Delta : R_* \to \mathrm{Sym}[t] \cong \oplus_\pi \mathrm{Sym}_m[t]$ 是环同构, 它将 σ_m 映为对称齐次多项式 $h_m = \sum_{m_1+\cdots+m_r=m} t_1^{m_1}\cdots t_r^{m_r}$, 即 $\prod(1-t_iX)^{-1}$ 中 X^m 的系数；并将 λ_m 映为对称多项式 $c_m = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_m}$, 即 $\prod(1+t_iX)$ 中 X^m 的系数.

证明：为证 Δ 是环同态, 我们考虑一个更一般的构造. 设 $H\subseteq\Sigma_m$ 为任一子群, 定义 $\Delta_H : R_*H \to \mathrm{Sym}_m[t]$:

$$\Delta_H(\alpha) := \sum_\pi \mathrm{Trace}[\hom_H(V_\pi, T^{\otimes m})]\cdot\alpha([V_\pi]),$$

使得 $[V_\pi]$ 取遍 H 的全部不可约表示. 接下来我们想介绍 Δ_H 的两个性质, 分别体现了 Δ 的乘性和某种泛性质:

（1）设 $\alpha\in R_*\Sigma_i$,$\beta\in R_*\Sigma_j$, 考虑 $\alpha\otimes\beta\in R_*\Sigma_i\otimes R_*\Sigma_j\cong R_*(\Sigma_i\times\Sigma_j)$. 则有 $\Delta_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(\alpha\otimes\beta)=\Delta_{\Sigma_i}(\alpha)\Delta_{\Sigma_j}(\beta)$.

（2）若 $\alpha\in R_*H$, 且 $\alpha'\in R_*\Sigma_m$ 是 α 在限制映射的对偶下的像, 则 $\Delta_H(\alpha)=\Delta_{\Sigma_m}(\alpha')$.

(1) 可以由迹关于张量积的乘性直接得到:

$$\begin{aligned}\Delta_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(\alpha\otimes\beta) &= \sum_{\pi,\rho}\mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(V_\pi\otimes V'_\rho, T^{\otimes m})]\alpha([V_\pi])\beta([V'_\rho])\\ &= \sum_{\pi,\rho}\mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_i}(V_\pi, T^{\otimes i})]\mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_j}(V'_\rho, T^{\otimes j})]\alpha([V_\pi])\beta([V'_\rho])\\ &= \Delta_{\Sigma_i}(\alpha)\Delta_{\Sigma_j}(\beta).\end{aligned}$$

此处 V_π 和 V'_ρ 分别是 Σ_i 和 Σ_j 的不可约表示, 因此 $\{V_\pi\otimes V'_\rho\}$ 是 $R(\Sigma_i\times\Sigma_j)$ 里的全体不可约表示.

(2) 则由 Frobenius 互反律得到. 即, 若 $\{V_\pi\}$ 和 $\{V'_\rho\}$ 分别是 H 和 G 的不可约表示, 且 $H\subseteq G$,$\mathrm{ind}_H^G V_\pi = \oplus_\rho n_{\pi\rho}V'_\rho$, 则由 $n_{\pi\rho}=\dim[\hom_H(V_\pi,\mathrm{res}_H^G V'_\rho)] = \dim[\hom_G(\mathrm{ind}_H^G V_\pi, V'_\rho)]$ 可得 $\mathrm{res}_H^G V'_\rho = \oplus_\pi n_{\pi\rho}V_\pi$.

因此

$$
\begin{aligned}
\Delta_H(\alpha) &= \sum_{\pi} \mathrm{Trace}[\hom_H(V_\pi, T^{\otimes m})]\alpha([V_\pi]) \\
&= \sum_{\pi} \mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_m}(\mathrm{ind}_H^{\Sigma_m} V_\pi, T^{\otimes m})]\alpha([V_\pi]) \\
&= \sum_{\pi,\rho} n_{\pi\rho} \mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_m}(V'_\rho, T^{\otimes m})]\alpha([V_\pi]) \\
&= \sum_{\rho} \mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_m}(V'_\rho, T^{\otimes m})]\alpha'(V'_\rho) = \Delta_{\Sigma_m}(\alpha').
\end{aligned}
$$

即得（2）成立.

由 $\Delta(\sigma_m) = \mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_m}(1, T^{\otimes m})]$ 可以直接得 $\Delta(\sigma_m) = h_m$.

类似地, 由 $\Delta(\lambda_m) = \mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_m}(\mathrm{sgn}, T^{\otimes m})]$ 得到 $\Delta(\lambda_m) = c_m$.

因为 Δ 把 σ_m 送到 h_m, 把 λ_m 送到 c_m, 而对称多项式环 $\mathrm{Sym}[t]$ 既可以由 h_m 生成又可以由 c_m 生成, 因此 Δ 是满射.

又因为 $R\Sigma_m$ 与 $\mathrm{Sym}_m[t]$ 的秩都等于 m 的划分的数量, 因此秩相等. 所以 Δ 是等秩序 Z-自由模之间的满同态, 因此 Δ 是同构. ■

注释 3.1：由于 σ_m 和 λ_m 分别是 $\prod(1 - t_i X)^{-1}$ 和 $\prod(1 + t_i X)$ 中 X^m 的系数, 所以上述证明也表明 $\sum \sigma_m X^m = (\sum \lambda_m (-X)^m)^{-1}$.

因为 Δ 这个同构把 σ_m 和 λ_m 分别映射到了 $\mathrm{Sym}_m[t]$ 的两组基上, 那么自然的问题就是: 是否 $\mathrm{Sym}_m[t]$ 的基的原像也是一组基, 即 σ_m 和 λ_m 是否也分别构成了 R_* 的一组基. 这个问题引导我们考虑 R_* 的基.

与"$R\Sigma_m$ 与 $\mathrm{Sym}_m[t]$ 的秩都等于 m 的不同划分方式的数量" 相对应, 全体 $b_{\underline{m}} = \Delta^{-1}[(t_1^{m_1} \cdots t_r^{m_r}) + \cdots]$ 构成了 $R_*\Sigma_m$ 的一组基, 其中不同 $b_{\underline{m}}$ 的区别在于 m_i 的划分不同. 下面我们将找出 $R\Sigma_m$ 中的对偶基.

在 $r \geqslant m$ 的情况下考虑 Σ_m-表示 $(\mathbb{C}^r)^{\otimes m}$. 对于 $\underline{m} = (m_1, \cdots, m_n)$ 且 $\sum m_i = m$, 令 E_m 表示作用于 $(\mathbb{C}^r)^{\otimes m}$ 的 T 的对应于特征值 $t_1^{m_1} \cdots t_r^{m_r}$ 的特征子空间. 则 E_m 由 $e_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes e_r^{\otimes m_r}$ 在 Σ_m 作用下的轨道张成, 其中 $e_i \in \mathbb{C}^r$ 是 $\mathbb{C}^r$ 的基向量. 因此 $E_{\underline{m}} \cong \rho_{\underline{m}}$, 这里的 $\rho_{\underline{m}}$ 表示被诱导出来的群表示 $\mathrm{ind}_{\Sigma_{m_1} \times \cdots \times \Sigma_{m_r}}^{\Sigma_m}$. 因此 $(\mathbb{C}^r)^{\otimes m} \cong \oplus E_{\underline{m}} \cong \oplus \rho_{\underline{m}}$, 求和跑遍所有序列. 注意 $\rho_{\underline{m}}$ 在同构意义下不依赖于 $m_1, \cdots, m_r$ 的前后顺序, 因此它们可用 m 的划分进行枚举得到全体, 也就是满足 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots$ 且 $\sum m_i = m$ 的集合 $(m_i)'s$.

因此有

$$
\begin{aligned}
\Delta(\alpha) &= \sum_{\pi}\sum_{m_1,\cdots,m_r} \mathrm{Trace}[\hom_{\Sigma_m}(V_\pi, T^{\otimes m}|_{E_{\underline{m}}})]\cdot\alpha([V_\pi]) \\
&= \sum_{m_1,\cdots,m_r} t_1^{m_1}\cdots t_r^{m_r}\sum_{\pi}\dim[\hom_{\Sigma_m}(V_\pi, E_{\underline{m}})]\cdot\alpha([V_\pi]) \\
&= \sum_{m_1,\cdots,m_r} t_1^{m_1}\cdots t_r^{m_r}\cdot\alpha([E_{\underline{m}}]) \\
&= \sum_{m_1\geqslant\cdots\geqslant m_r} \Delta(b_{\underline{m}})\cdot\alpha([\rho_{\underline{m}}]).
\end{aligned}
$$

因此 $R_*\Sigma_m$ 的基 $b_{\underline{m}}$ 与 $R\Sigma_m$ 中的 $\rho_{\underline{m}}$ 对偶. 故后者构成 $R\Sigma_m$ 的一组整数基.

由于 $\rho_{\underline{m}}$ 是置换表示, 所以其特征值是整数. 因此我们得出结论:

命题 3.4：对称群的表示的特征标均为整数.

此外, 由于除了平凡表示 $1=\rho_{(m,0,\cdots,0)}$ 外, 所有表示 $\rho_{\underline{m}}$ 都是由形如 $\Sigma_i\times\Sigma_{m-i}$（其中 $0<i<m$）的 Σ_m 的子群诱导出来的, 所以此命题还告诉了我们:

$$R\Sigma_m/I_t \approx \mathbb{Z}.$$

至此, 我们终于看到了特征标映射的影子. 接下来, 我们会看到特征标映射对应的运算就是拓扑 K 理论上非常经典的 Adams 运算, 并且会看到 Adams 运算可以用来表示我们上一节中定义出的拓扑 K 理论上的幂运算. 它们之间有非常密切的联系.

特征标理论给出了一些 R_* 中的特殊元素. 给定 m 的一个划分 $\underline{m}=(m_1,\cdots,m_r)$, 令 $g_{\underline{m}}\in\Sigma_m$ 表示一个由长度分别为 $m_1,m_2,\cdots$ 的无交轮换的乘积. 用 $\psi_{m_1,\cdots,m_r}\in R_*\Sigma_m$ 表示由特征标赋值给出的函数:

$$\psi_{m_1,\cdots,m_r}([V]) = \chi(V, g_{m_1,\cdots,m_r}).$$

命题 3.5：在环 R_* 中, 我们有 $\psi_{m_1,\cdots,m_r}=\psi_{m_1}\cdots\psi_{m_r}$.

证明：在共轭意义下, 可将 $g_{\underline{m}}$ 等同于子群 $\Sigma_{m_1}\times\cdots\times\Sigma_{m_r}\subset\Sigma_m$ 中的元素 $(g_{m_1},\cdots,g_{m_r})$.

$$\chi(V, g_{\underline{m}}) = \mathrm{Trace}((g_{m_1},\cdots,g_{m_r})|V).$$

我们需要证明它等于迹的乘积 $\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Trace}(g_i|V)$. 只需对 $\Sigma_{m_1}\times\cdots\times\Sigma_{m_r}$ 的不可约表示验证. 这样的不可约表示形如 $W=W_1\boxtimes\cdots\boxtimes W_r$, 其中 W_i 是 Σ_{m_i} 的不可约表示. 这一等式可由张量积的迹的乘性直接得到. ■

因此环 $R_*=\mathbb{Z}[\sigma_m, m\geqslant 1]$ 包含了一个由特征标决定的 Z 系数多项式子环 $\mathbb{Z}[\psi_m, m\geqslant 1]$. 至此我们基本引出了三个经典的运算（对称幂运算、外幂运算与

Adams 运算）对应的表示, 其中 σ_m 与 ψ_m 的关系由下式给出.

命题 3.6：

$$\sum_{m\geqslant 0}\sigma_m\cdot q^m=\exp\left[\sum_{m\geqslant 1}\psi_m\cdot\frac{q^m}{m}\right];$$

这里 q 是形式变元, 该等式在环 $\prod_m R_*\Sigma_m\cdot q^m$ 中成立. 其中 $\sigma_0=1$.

证明：将 Δ 作用在等式两边得到:

$$\Delta\left[\sum_{m\geqslant 0}\sigma_m\cdot q^m\right]=\sum_{m\geqslant 0}h_m\cdot q^m=\prod_i(1-t_iq)^{-1},$$

利用 $\Delta(\psi_m)=\sum_i t_i^m$, 我们得到

$$\begin{aligned}\Delta\exp\left[\sum_{m\geqslant 1}\psi_m\cdot\frac{q^m}{m}\right]&=\exp\left[\sum_{m\geqslant 1}\sum_i t_i^m\cdot\frac{q^m}{m}\right]\\&=\prod_i\exp\left[\sum_{m\geqslant 1}t_i^m\frac{q^m}{m}\right]\\&=\prod_i\exp(-\log(1-t_iq))=\prod_i(1-t_iq)^{-1}.\end{aligned}$$

Δ 是同构, 故得证.

■

以上是我们在表示构成的环上做的全部铺垫, 可能有读者会忍不住问, 为什么这节讲了这么久却还没一点运算呢？其实我们在上面研究表示的时候就是在研究拓扑 K 理论的运算. 这是由下面的对应关系给出的, 它说明了 R_* 的元素与拓扑 K 理论的运算一一对应:

定义 3.8：任给 $R_*\Sigma_m$ 上的一个元素 $u\in, u\in$ 都给出一个 $K(X)$ 上的运算:

$$\Phi:R_*\Sigma_m(:=\hom_{\mathbb{Z}}(R\Sigma_m,\mathbb{Z}))\to\mathrm{Map}(K(X),K(X))$$

$$u\mapsto\Phi(u)$$

其中,

$$\Phi(u):x\mapsto\Phi(u)\propto x:=P_m\circ(\mathrm{id}\otimes u):K(X)\xrightarrow{P_m}K(X)\otimes R\Sigma_m\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes u}K(X)\otimes\mathbb{Z}\cong K(X)$$

注释 3.2：$R_*\Sigma_m$ 中的元素 σ_m 和 λ_m 分别对应于对称幂运算和外幂运算.

注释 3.3：即 $\alpha\alpha(L_1+\cdots+L_r)=\Delta(\alpha)(L_1,\cdots,L_r)$,, 其中 L_i 是线丛.

我们有以下两个等式:

$$(\alpha+\beta)\propto x=\alpha\propto x+\beta\propto x,\quad (\alpha\cdot\beta)\propto x=(\alpha\propto x)(\beta\propto x).$$

第一个等式显然. 第二个则要用到乘法映射.

命题 3.7： R_* 是交换余交换的双代数.

证明： 存在映射:

$$（1）\Delta_+ : R_*\to R_*\otimes R_* \quad 和 \quad \epsilon_0 : R_*\to\mathbb{Z}$$

对偶于

$$R\Sigma_m \xleftarrow{\text{ind}} R\Sigma_i\otimes R\Sigma_j \quad 和 \quad R\Sigma_0\xleftarrow{1}\mathbb{Z}.$$

$$（2）\Delta_\times : R_*\to R_*\otimes R_* \quad 和 \quad \epsilon_1 : R_*\to\mathbb{Z}$$

对偶于

$$R\Sigma_m \xleftarrow{\mu} R\Sigma_m\otimes R\Sigma_m \quad 和 \quad R\Sigma_m\xleftarrow{1}\mathbb{Z}.$$

Δ_+ 与加性一致, 让 R_* 成为余交换的余代数, 具体体现在:

$$\alpha\circ(x+y)=\sum(\alpha'_+\circ x)(\alpha''_+\circ y)\quad 和 \quad \alpha\circ 0=\epsilon_0(\alpha),$$

其中 $\Delta_+(\alpha)=\sum\alpha'_+\otimes\alpha''_+$.

$\Delta_\times$ 与乘性一致, 让 R_* 成为交换的代数, 具体体现在:

$$\alpha\circ(xy)=\sum(\alpha'_+\circ x)(\alpha''_+\circ y)\quad 和 \quad \alpha\circ 1=\epsilon_1(\alpha),$$

其中 $\Delta_\times(\alpha)=\sum\alpha'_+\otimes\alpha''_+$.

且 Δ_+ 和 $\Delta_\times$ 都与 R_* 上的环结构相容. 因此我们说 R_* 是交换余交换的双代数.

■

事实上, 如果再加入定义为 $S(V)=(-1)^m(V\otimes\mathrm{sgn}_m)$ 的对极映射 S, 那么 R_* 就成为了 Hopf 代数, 其中 sgn_m 是对称群的符号表示.

接下来我们将展示特征表示和 Adams 运算的一些性质. 通过它们, 也能了解到为什么 Adams 运算如此重要.

定义 3.9： Adams 运算 $\psi^m := \Phi(\psi_m)=\psi\propto(\cdot)$.

由定义直接有

$$\Delta_+(\psi_m)=\psi_m\otimes 1+1\otimes\psi_m,\quad \epsilon_0(\psi_m)=0.$$

因此 ψ_m 对应于加性运算. 这是它与 Steenrod 运算的共同之处, 也是我们特别关注 Adams 运算的原因.

又有

$$\Delta_\times(\psi_m)=\psi_m\otimes\psi_m,\quad \epsilon_1(\psi_m)=1.$$

因此 Adams 运算 Ψ^m 是 K(X) 上的环同态.

例 3.5：对称幂和外幂运算（对应于 σ_m 和 λ_m）和 Adams 运算不同, 不具有加性. 但我们可以利用由 ψ^m 表示 σ_m 的公式

$$\sum\sigma_m q^m=\exp(\sum\psi_m q^m/m)$$

来得到与加性形式相仿的式子:

对上述公式应用 Δ_+ 得:

$$\exp(\sum\psi_m\otimes 1\cdot q^m/m)=\exp(\sum 1\otimes\psi_m\cdot q^m/m)=(\sum\sigma_m\otimes 1\cdot q^m)(\sum 1\otimes\sigma_m\cdot q^m)$$

$$=\sum_{i,j}\sigma_i\otimes\sigma_j\cdot q^{i+j}.$$

即,

$$\Delta_+(\sigma_m)=\sum_{i+j=m}\sigma_i\otimes\sigma_j.$$

类似地, 对于 λ_m 我们也有相同的结果:

$$\Delta_+(\lambda_m)=\sum_{i+j=m}\lambda_m\otimes\lambda_m.$$

在这个例子中, 我们通过用 Adams 运算来表示对称幂运算和外幂运算的公式很好地得到了对称幂运算和外幂运算的性质. 那么自然我们会问: 是否能用 Adams 运算表示 total 幂运算 P_m？ 答案是可以.

命题 3.8：

$$\sum_{m\geqslant 0}P_m(x)\cdot q^m=\exp\left[\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m}\psi_m^*\cdot\psi^m(x)\cdot q^m\right].$$

该等式在环 $\mathbb{Q}\otimes\prod_m(K(X)\otimes R\Sigma_m)\cdot q^m$ 中成立, 这里的乘法由 $K(X)$ 中的乘法以及 $\prod R\Sigma_m$ 中的乘积给出.

这一命题的证明需要借助以下引理 3.3 中的两个结论:

引理 3.3：　(a)在赋值映射 $R_*\Sigma_m\otimes R\Sigma_m\to\mathbb{Z}$ 下, 有

$$(\psi_1^{d_1}\cdots\psi_r^{d_r})\otimes(\psi_1^{e_1}\cdots\psi_r^{e_r})^*\mapsto\begin{cases}c(d_1,\cdots,d_r) & \text{若对所有} i \text{ 都有} d_i=e_i,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

其中 $c(d_1,\cdots,d_r) := (1^{d_1})(2^{d_2})\cdots(r^{d_r})\cdot(d_1!)(d_2!)\cdots(d_r!)$.

(b)我们有

$$(\psi_1^{d_1}\cdots\psi_r^{d_r})^* = (\psi_1^*)^{d_1}\cdots(\psi_r^*)^{d_r}.$$

命题 3.10 的证明：先说明使用的记号: $\psi^{\underline{d}} = \psi_1^{d_1}\cdots\psi_r^{d_r}$,$c(\underline{d}) = c(d_1,\cdots,d_r)$, 并记 $|\underline{d}| = d_1+2d_2+\cdots+rd_r$. 首先, 引理（a）表明元素 $(\psi^{\underline{d}})^*/c(\underline{d})$ 对偶于 $\oplus R_*\Sigma_m\otimes\mathbb{Q}$ 中的 $\psi^{\underline{d}}$, 构成了 $\oplus R\Sigma_m\otimes\mathbb{Q}$ 的一组基. 所以我们只需要在每个基元素上验证 $P_m(x)$ 和 $\sum_{|d|=m}\frac{1}{c(\underline{d})}(\psi^{\underline{d}})^*\otimes\psi^{\underline{d}}$ 它们是否一致即可说明相等与否.

因此只需验证下式

$$\sum_{m\geqslant 0}\left[\sum_{|d|=m}\frac{1}{c(\underline{d})}(\psi^{\underline{d}})^*\otimes\psi^{\underline{d}}\right]\cdot q^m = \exp\left[\sum_{m>0}\frac{1}{m}\psi_m^*\otimes\psi_m\cdot q^m\right]$$

在环 $\prod(R\Sigma_m\otimes R_*\Sigma_m)\cdot q^m$ 中是否成立.

而因为该式可以从

$$\sum_{d}\frac{1}{c(\underline{d})}U^{\underline{d}} = \exp\left[\sum_{m>0}\frac{1}{m}U_m\right]\quad 在\quad \mathbb{Q}[U_1,U_2,\cdots]$$

得到, 所以由引理 (b), 我们直接验证该式成立.

■

3.4　λ-环结构

在前面的讨论中, 我们从群表示环与运算对应的角度给出了经典的几个运算并分析了它们彼此之间、它们与全幂运算之间的显式关系. 而 Grothendieck 洞察到它们关系的本质来源于 K(X) 作为交换环的 λ-环结构. 下面我们给出 λ-环的基本定义并说明 λ 运算与 Adams 运算更深层次的关系.

定义 3.10：λ-环是指配备有满足下列性质的 λ^m 运算的交换环 A:

$$\lambda^m: A\to A,\qquad m\geqslant 0,$$

（1）$\lambda^0(x) = 1$；

（2）$\lambda^1(x) = x$；

（3）$\lambda^m(1) = 0$, 当 $m>1$ 时；

（4）

$$\lambda^m(x+y) = \sum_{i+j=m}\lambda^i(x)\lambda^j(y);$$

（5）

$$\lambda^m(xy) = F_m(\lambda^1(x), \cdots, \lambda^m(x); \lambda^1(y), \cdots, \lambda^m(y));$$

（6）

$$\lambda^m(\lambda^n(x)) = G_{m,n}(\lambda^1(x), \cdots, \lambda^{mn}(x));$$

这里的 $F_m \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_m]$ 和 $G_{m,n} \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_{mn}]$ 都是满足下列条件的多项式:

$$\sum_m F_m(c_1(\underline{t}), \cdots, c_m(\underline{t}), c_1(\underline{u}), \cdots, c_m(\underline{u})) \cdot X^m = \prod_{i,j}(1 + t_i u_j X),$$

和

$$\sum_m G_{m,n}(c_1(\underline{t}), \cdots, c_{mn}(\underline{t})) \cdot X^m = \prod_{i_1 < \cdots < i_n}(1 + t_{i_1} \cdots t_{i_n} X),$$

其中 $c_i(\underline{t})$ 是 t 变量的第 i 个初等对称多项式. 容易证明拓扑 K 理论的外幂运算 λ^m 赋予了 $K(X)$ λ-环结构. 这个定义最早由 Atiyah 给出[11]. 在这篇文章里,K 理论上的 λ-环被叫做特殊 λ-环

命题 3.9：拓扑 K 理论 $K(X)$ 的外幂运算 λ^m 赋予了它 λ-环结构.

证明：我们知道在 K(X) 上, 外幂运算 λ^m 定义为 $\lambda^m([E]) = [\Lambda^m E]$, 总 λ-运算定义为 $\lambda_z(x) := \sum_{m\geqslant 0} \lambda^m(x) z^m$, 对向量丛有 $\Lambda^m(E \oplus F) \cong \oplus_{i+j=m} \Lambda^i E \otimes \Lambda^j F$, 因此 $\lambda_z(E \oplus F) = \lambda_z(E)\lambda_z(F)$ 且 $\lambda_z(x - y) = \frac{\lambda_z(x)}{\lambda_z(y)}$. 之所以列总的 λ-运算是因为可以通过将总的 λ-运算展开从而直接得到某一分次的系数得到 λ^m 作用后的结果.

现对定义 3.10 中的（1）到（6）逐个验证:

(1) 验证 $\lambda^0(x) = 1$.

对向量丛 E, 有 $\Lambda^0 E \cong X \times \mathbb{C}$, 所以 $\lambda^0([E]) = [X \times \mathbb{C}] = 1$. 对向量丛的形式差而言 $x - y$, 因为 $\lambda_z(x - y) \in 1 + zK(X)[[z]]$, 其常数项仍为 1. 所以 $\lambda^0(x) = 1$

(2) 验证 $\lambda^1(x) = x$.

对向量丛 E, 有 $\Lambda^1 E = E$, 所以有 $\lambda^1([E]) = [E]$. 对向量丛的形式差 $x - y$, 有 $\lambda_z(x) = 1 + xz + O(z^2)$, $\quad \lambda_z(y) = 1 + yz + O(z^2)$. 因此 $\lambda_z(x - y) = \frac{1+xz+O(z^2)}{1+yz+O(z^2)} = 1 + (x - y)z + O(z^2)$, 从一次项系数直接得到 $\lambda^1(x - y) = x - y$.

(3) 验证 $\lambda^m(1) = 0$（$m > 1$）.

对任意线丛 L, 有 $\Lambda^0 L \cong X \times \mathbb{C}, \Lambda^1 L \cong L, \Lambda^m L = 0$ ($m > 1$时). 因此 $\lambda_z(1) = 1 + z$,. 所以 $\lambda^m(1) = 0(m > 1$时).

(4) 验证 $\lambda^m(x + y) = \sum_{i+j=m} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$.

对于向量丛 E, F, 由 $\lambda_z(E \oplus F) = \lambda_z(E)\lambda_z(F)$ 可得 $\sum_{m\geqslant 0} \lambda^m(E \oplus F) z^m =$

$\left(\sum_{i\geqslant 0}\lambda^i(E)z^i\right)\left(\sum_{j\geqslant 0}\lambda^j(F)z^j\right)$. 通过比较 z^m 的系数我们有 $\lambda^m(E\oplus F)=\sum_{i+j=m}\lambda^i(E)\lambda^j(F)$. 因此对于任意 $x,y\in K(X)$ 有 $\lambda^m(x+y)=\sum_{i+j=m}\lambda^i(x)\lambda^j(y)$.

(5) 验证 $\lambda^m(xy)=F_m(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^m(x);\lambda^1(y),\cdots,\lambda^m(y))$.

设 $x=[E]$,$y=[F]$. 根据分裂定理, 存在映射 $f:Y\to X$, 使得 $f^*:K(X)\to K(Y)$ 是单射, 且 $f^*E\cong\oplus_i L_i, f^*F\cong\oplus_j M_j$, 其中 L_i,M_j 都是线丛. 记 $t_i=[L_i],u_j=[M_j]$, 则 $f^*x=\sum_i t_i, f^*y=\sum_j u_j$. 从而有 $\lambda_z(f^*x)=\prod_i(1+t_iz),\lambda_z(f^*y)=\prod_j(1+u_jz)$. 因此 $\lambda^r(f^*x)=c_r(t),\lambda^r(f^*y)=c_r(u)$, 其中 $c_r(t)$ 与 $c_r(u)$ 分别是变量 t_i 与 u_j 的第 r 个基本对称多项式.

再看乘法 $xy=[E\otimes F]$. 有 $f^*(xy)=[f^*E\otimes f^*F]=[\oplus_{i,j}(L_i\otimes M_j)]$, 故 $\lambda_z(f^*(xy))=\prod_{i,j}(1+t_iu_jz)$. 按照 F_m 的定义,$\sum_m F_m(c_1(t),\cdots,c_m(t);c_1(u),\cdots,c_m(u))\,z^m=\prod_{i,j}(1+t_iu_jz)$, 通过比较 z^m 的系数我们有 $\lambda^m(f^*(xy))=F_m(c_1(t),\cdots,c_m(t);c_1(u),\cdots,c_m(u))$. 再代入 $c_r(t)=\lambda^r(f^*x),c_r(u)=\lambda^r(f^*y)$, 便有 $\lambda^m(f^*(xy))=F_m(\lambda^1(f^*x),\cdots,\lambda^m(f^*x);\lambda^1(f^*y),\cdots,\lambda^m(f^*y))$. 由于 f^* 是单射, 所以得到 $\lambda^m(xy)=F_m(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^m(x);\lambda^1(y),\cdots,\lambda^m(y))$.

(6) 验证 $\lambda^m(\lambda^n(x))=G_{m,n}(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^{mn}(x))$.

同样先设 $x=[E]$, 取分裂定理给出的单射 $f^*:K(X)\to K(Y)$, 使得 $f^*E\cong\oplus_i L_i$., 记 $t_i=[L_i]$. 那么直接得到 $f^*x=\sum_i t_i,\lambda^r(f^*x)=c_r(t)$.. 因为 $\Lambda^n(\oplus_i L_i)\cong\oplus_{i_1<\cdots<i_n}L_{i_1}\otimes\cdots\otimes L_{i_n}$., 所以 $\lambda^n(f^*x)=\lambda^n\left(\sum_i t_i\right)=\sum_{i_1<\cdots<i_n}t_{i_1}\cdots t_{i_n}$, 所以有 $\sum_{m\geqslant 0}\lambda^m(\lambda^n(f^*x))z^m=\prod_{i_1<\cdots<i_n}\left(1+t_{i_1}\cdots t_{i_n}z\right)$. 而按照 $G_{m,n}$ 的定义,$\sum_m G_{m,n}(c_1(t),\cdots,c_{mn}(t))\,z^m=\prod_{i_1<\cdots<i_n}\left(1+t_{i_1}\cdots t_{i_n}z\right)$. 通过比较 z^m 的系数得 $\lambda^m(\lambda^n(f^*x))=G_{m,n}(c_1(t),\cdots,c_{mn}(t))$. 代入 $c_r(t)=\lambda^r(f^*x)$, 就得到了 $\lambda^m(\lambda^n(f^*x))=G_{m,n}(\lambda^1(f^*x),\cdots,\lambda^{mn}(f^*x))$.. 由于 f^* 是单射, 所以我们最终得到 $\lambda^m(\lambda^n(x))=G_{m,n}(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^{mn}(x))$..

综上得证. ■

例 3.6： R_* 也是 λ-环.

一般来说用 λ 运算来讨论 λ-环最自然, 但实际上使用 Adams 运算更方便. 这是因为 Adams 运算都是环同态（在上一节里我们在拓扑 K 理论的语境下详细讨论了这一点）, 而且在很多情况下 λ 运算可以由 Adams 运算显式子地表示出来, 甚至被 Adams 运算唯一决定.

命题 3.10：

$$\psi^m:A\to A,\quad m\geqslant 1,$$

具有如下性质:

（1）$\psi^1(x) = x$.

（2）$\psi^m(\psi^n(x)) = \psi^{mn}(x)$.

（3）对素数 p, 有 $\psi^p(x) \equiv x^p \pmod{p}$.

在 A 为无挠环的情况下, 因为 $R_* \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\Psi^m, m \geqslant 1]$, 所以 λ 运算会被被 Adams 运算唯一决定. 那反过来呢？显然条件（1）、（2）都是必要的, 但（3）似乎无法确定.Wilkerson 给出肯定答案[34]:

定理 3.3 (Wilkerson 定理[34])：设 A 是一个配备有满足上述 (1)−(3) 的环同态 $\psi^m : A \to A$ 的无挠环, 那么 A 上存在唯一一个与这些运算相容的 λ-环结构.

这一定理说明了 λ 运算完全由 Adams 运算决定, 这也与我们在上一节在 R_* 情境下观察到的事实契合:λ 运算对应的群表示可以被与 Adams 运算对应的群表示显式地表示.

至此, 我们通过第二章和第三章分别回顾了经典上同调理论上的 Steenrod 运算以及拓扑 K 理论上的幂运算. 前者通过对称群作用与等变上同调构造了一套稳定的上同调运算, 极大地提升了经典上同调理论识别拓扑空间差异的精细程度；后者则从表示论与 λ-环结构的角度揭示了幂运算与 Adams 运算之间的深刻联系. 然而, 这些结果主要还是建立在拓扑空间的框架上. 当我们将目光转向代数几何中的概形或代数簇时, 自然希望也能构造出类似的上同调运算, 以便在代数框架下获得精细的不变量. 因此我们将在第四章和第五章介绍 Brosnan 发展的代数几何中的 Steenrod 运算及其在拓扑向量丛代数化问题上的应用.

第 4 章　周群上的 Steenrod 运算

自 20 世纪 90 年代以来, 随着 motivic 上同调理论与 $\mathbb{A}^1$-同伦论的建立与发展,Voevodsky 成功地将 Steenrod 运算引入 motivic 上同调理论中去, 解决了 Milnor 猜想[31]. 在此背景下,2003 年,Brosnan 采用与 Voevodsky[32] 不同, 与 Steenrod 和 Epstein 类似的的方式在周群上系统地构造了 Steenrod 运算, 从而为代数簇的研究提供了新的强有力的工具[13].

本章将围绕 Brosnan 的构造展开, 依次介绍周群上 Steenrod 运算的定义、基本性质以及主要定理. 我们将重点说明如何借助光滑代数空间上的等变相交理论来定义运算 D^W, 进而通过适当的变量替换得到全 Steenrod 运算 S_*. 同时, 我们也会讨论这些运算满足的基本性质, 如 Cartan 公式和 Adem 关系等. 通过对本章与第二章经典构造的对照阅读, 读者可以更清晰地看到同一种运算在不同数学框架下的异同及联系, 并为我们后续在第五章讨论周群上 Steenrod 运算在拓扑向量丛代数化问题中的具体应用奠定必要的基础.

4.1　周群上 Steenrod 运算的构造

本节我们将利用对称群作用和等变理论定义周群上的 Steenrod 运算.

考虑 (W,X), 其中 W 是 d 维光滑连通代数空间,$X \to W$ 是一个嵌入. 设 $m = (n-1)d$, 构造以下的 $S(n)$-等变拉回图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[d] \\ W \arrow[r, "\Delta"] & W^n \end{tikzcd}$$

其中 $S(n)$ 通过置换作用作用在 W^n 和 X^n 上, 它在 W 和 X 上的作用是平凡的, 并取 Δ 对角嵌入.

定义 4.1：设 G 是 $S(n)$ 的子群, 定义映射 $d_G^W = A_k^G X^n \to A_{k-m}^G X$, 其中 $d_G^W(\alpha) = \Delta_G^! \alpha$. 我们将 D_G^W 记作 $d_G^W \circ P_G^n$.

命题 4.1：设 $j_i : X \to W_i$ 是两个嵌入, 其中 W_i 都是光滑空间. 则有:

$$c_{\mathrm{top}}(R \otimes TW_2|_X) \cap d_G^{W_1} = c_{\mathrm{top}}(R \otimes TW_1|_X) \cap d_G^{W_2}.$$

引理 4.1： 设 X 和 Y 是两个 G-等变空间, 以下 $i = 1,2$ 两图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_i"'] & Y \arrow[d, "h_i"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

是带嵌入 $f_i : X_i \to Y_i$ 的 G-等变拉回图. 令 $N_i = g_i^* N_{X_i} Y_i, n_i = \mathrm{rk}\, N_i$. 那么对于任意 $\alpha \in A_*^X Y$ 都有

$$c_{n_1} N_1 \cap f_2^! \alpha = c_{n_2} N_2 \cap f_1^! \alpha.$$

命题 4.2： 设

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ V \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

是一个由单射构成的交换图, 其中水平方向的映射都是开嵌入,W 和 V 都光滑.

(i)对于 $\alpha \in A_*^G X^n$, 有 $j^{n*}(d_G^W \alpha) = d_G^V (j^{n*} \alpha)$.

(ii)对于 $\alpha \in A_* X$, 有 $j^*(D_G^W \alpha) = D_G^V (j^* \alpha)$.

设 n 是不被 $\mathrm{char}(k)$ 整除的整数, μ_n 是 n 次单位根的代数群（作为代数簇, 它是 $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^n - 1)$）.$\mu_n$ 的一维典范表示给出了 pt_k 上的等变线丛 L. 设 $l = c_1(L) \in A^1 B\mu_n$. 下面的结果在 $k = \mathbb{C}$ 时由 Totaro[29] 给出,Brosnan 给出了更一般情况下的推广.

定理 4.1： (i) $A^* B\mu_n = \Lambda[l]/(nl)$.

(ii) 如果 X 是具有平凡 μ_n-作用的代数空间, 则 $A_*^{\mu_n} X = A_* X \otimes A^* B\mu_n$.

我们现在作出一些符号说明, 接下来的部分都将采用这些符号. 取 p 未不等于 k 的特征的素数, 设 $\Lambda = \mathbf{F}_p$. 若无明确说明, 周群均模 p 考虑. 如果 $k^\times$ 包含群 $\mu_p(\overline{k})$, 那么有 $C(p) \cong \mu_p$. 但这两个群当然不是自然同构的. 这些同构与本原 p 次单位根一一对应. 因此, 我们假设在 $\overline{k}$ 中已选定这样一个本原根 ζ, 于是就可以写 $A^* BC(p)_{\overline{k}} = \mathbf{F}_p[l]$.

注释 4.1： 注意, 即使不选定 ζ, $C(p)$ 的一维表示和 μ_p 之间也有自然对应. 第一陈类给出了 μ_p 与 $A^1 BC(p)$ 之间的对应. 也就是说: 在包含 p 次单位根的域上,$A^1 BC(p) = \mathbb{Z}/p(1)$. 因此有 $A^k BC(p) = \mathbb{Z}/p(k)$.

命题 4.3： 设 $r = [k(\mu_p) : k]$ 是扩张次数. 则 $A^* BC(p) \cong \mathbb{F}_p[\epsilon]$, 其中 ϵ 是一个 r 维 $C(p)$ 表示的最高 (top) 陈类.

注释 4.2： 如果 X 是一个带 $C(p)$ 平凡作用的空间, 则 $A_*^{C(p)} X$ 是 $A_*^{C(p)} X_M$ 的一个直和项.

设 V 是 X 上的向量丛, V 和 X 都带有平凡的 $C(p)$ 作用, $\lambda_1,\cdots,\lambda_d$ 是 V 的陈根, $c_*(V)=\prod(1+\lambda_i)$. 记 $w(V)=\prod_{i=1}^{d}(1+\lambda_i^{p-1})$. 设多项式 $w(V,t)=\prod_{i=1}^{d}(1+t\lambda_i^{p-1})$.

通过对 ϵ 取逆来实现对周环 $A^*BC(p)$ 的局部化操作是较为方便的. 注意, 由于 ϵ 是非零除子,$A^*BC(p)$ 单射到 $(A^*B\mu_p)_\epsilon$. 在 X 被 $C(p)$ 平凡作用的情况下,ϵ 在 $A_*^{(p)}X$ 上也是非零除子. 用 η 表示最高 (top) 陈类 $c_{\mathrm{top}}(R)$. 根据 Wilson 定理, 有 $\eta=-l^{p-1}$.

命题 4.4：V 和 X 如上所述, 则

$$c_{\mathrm{top}}(R\otimes V)=\eta^d w(V,1/\eta).$$

设 $c_{\mathrm{top}}(R\otimes V)(t)$ 使得 $c_{\mathrm{top}}(R\otimes V)(\eta)=c_{\mathrm{top}}(R\otimes V)$ 的系数在 A^*X 中的多项式.（其具备唯一性）

我们将用 C 表示 $S=S(p)$ 的子群 $C(p)$, 用 D^W 表示 D_C^W. 注意, 如果 $C\leqslant G\leqslant S(p)$, 则限制映射 $A_*^G X\to A_*^G X$ 是分裂单射. 因此, 要计算 D^W, 只需计算所有 D_G.

引理 4.2：设 $T: A_*^C X^p\to A_*X^p$ 是转移. 则 $\Delta_C^! T=0$.

证明：由 $f_G^!\circ\mathrm{tr}_G^H=\mathrm{tr}_G^H\circ f_H^!$ 可知, 存在交换图:

$$\begin{tikzcd} & A_*X^p \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Delta^!"] & A_*^C X^p \arrow[d, "\Delta_C^!"'] \\ A_*^C X \arrow[r, "\rho^*"] & A_*X \arrow[r, "T"] & A_*^C X \end{tikzcd}$$

因为 ρ^* 是满射且 $T\rho^*=0$. 所以下面这一行的 T 为 0 映射, 因为上图交换所以得证. ■

命题 4.5：D^W 是群同态.

证明：设 Z_0 和 Z_1 为两个上链, 则有

$$(Z_0+Z_1)^{\times p}=Z_0^{\times p}+Z_1^{\times p}+\Gamma,$$

其中 Γ 位于 T 的像中. 因此, 根据上面的引理 4.2 有:

$$\Delta_C^!((Z_0+Z_1)^{\times p})=\Delta_C^!(Z_0^{\times p})+\Delta_C^!(Z_1^{\times p}).$$

由 D^W 的定义即得 D^W 为同态. ■

因为 $A_*^C X\subset A_*^C X_k$, 所以即使 k 不包含所有的 p 次单位根, 我们也可以把 $D^W(\alpha)$ 看作 A_*X 上的多项式 $\sum b_i l^i$.

命题 4.6：$D^W(\alpha)$ 中所有 i 不被 $p-1$ 整除的项 $b_i l^i$ 均为 0.

把 $D^W(\alpha)$ 看作最高 (top) 陈类 $\eta=c_{\mathrm{top}}(R)$ 上的多项式. 为了更好地看次数, 我们设 $D^W(\alpha,t)$ 是 $A_*X\otimes\mathbb{F}_p[t]$ 上的多项式, 使得 $D^W(\alpha,\eta)=D^W(\alpha)$.

与第二章在经典上同调理论中建立 Steenrod 运算的操作一样, 按照 Brosnan 提供的如下方法[13], 我们构造了代数几何上的 Steenrod 运算:

定义 4.2： (W, X) 的全 Steenrod 运算是只有有限项非零的 Laurent 级数:

$$S_{\bullet}^{W}\alpha(t) := t^{d-k}D^{W}\alpha(1/t),$$

其中 $d = \dim W$ 且 $\alpha \in A_k X$. 我们将 $S_{\bullet}^{W}\alpha(1)$ 简记为 $S_{\bullet}^{W}\alpha$. 这就是全 Steenrod 运算. 通过取 $S_{\bullet}^{W}\alpha(t) = \sum S_i^W(\alpha)t^i$ 来定义各个次数的运算 S_i^W. 注意 S_i^W 把 α 的次数降低 $(p-1)i$.

注释 4.3： 为了与拓扑记号保持一致, 对于 $p \neq 2$ 的情况, 我们定义 $P_i^W\alpha = S_i^W\alpha$. 而 $p = 2$ 时, 定义 $\mathrm{Sq}_{2i}^{W}\alpha = S_i^W$. 因为类映射只把周群打到偶数维上同调中, 所以周群上没有降低奇数阶的 Steenrod 运算（虽然理论上在 motivic 上同调中确实有这样的东西存在）.

注释 4.4： 由于 $D^W\alpha$ 是 t 的多项式, 所以当 $i > d-k$ 时, 有 $S_i^W\alpha = 0$.

注释 4.5： 设 $\alpha \in A^k[W, X]$, 我们也可以通过重新设置指标记号的方式来给出定义: 记 $S_W^{\bullet}\alpha(t) = t^k D^W\alpha(1/t)$ 并设 $S_W^{\bullet}\alpha(t) = \sum S_i^W t^i$. 那么自然有 $S_W^i\alpha \in A^{k+(p-1)i}[W, X]$.

由命题 4.2 可得:

命题 4.7： 如果 $j : U \to X$ 是 Zariski 开集的嵌入, 则

$$j^*(S_{\bullet}^{W}\alpha) = S_{\bullet}^{W}(j^*\alpha).$$

命题 4.8： 如果 W_1 和 W_2 是两个包含 X 的光滑空间, 则

$$S_{\bullet}^{W_1}\alpha \cap w(TW_2) = S_{\bullet}^{W_2}\alpha \cap w(TW_1).$$

证明： 由命题 4.1 和定义得

■

定义 4.3： 如果 X 光滑, 将 $S_{\bullet}^{X}\alpha$ 记为 $S^{\bullet}\alpha$. 这自然是 A^*X 上的运算, 因此 S^i 把次数提高了 $(p-1)i$.

注释 4.6： 设 $f : X \to Y$ 是光滑簇之间的态射. 则由 Gysin 的函子性可知, 对于 $\alpha \in A_*Y$ 有 $f^! D^Y(\alpha) = D^X(f^!\alpha)$[13]. 因此,

$$f^! S^{\bullet}\alpha = S^{\bullet} f^! \alpha.$$

定义 4.4： 对于任意嵌入到光滑空间 W 中的 X, 定义

$$S_{\bullet}\alpha(t) = S_{\bullet}^{W}\alpha(t) \cap \omega(TW, t)^{-1}.$$

由命题 4.8 可知 $S_{\bullet}\alpha$ 与 ω 的选择无关.

注释 4.7： 因为周群 $\mathrm{CH}^*(X)$ 可以嵌入 motivic 上同调的 $(2*, *)$ 部分, 所以 Brosnan 在周群上构造的 Steenrod 运算, 本质上就是 Voevodsky 的 motivic Steenrod 运算在

motivic 上同调的 $(2*,*)$ 部分上的限制. 因此可以看作它的一个特例.

4.2　周群上 Steenrod 运算的性质

本节我们将介绍上一节中定义的周群上的 Steenrod 运算满足的基本性质, 主要是 Cartan 公式和 Adem 关系.

设 $i: X \to Y$ 是闭嵌入, 且 Y 嵌入光滑簇 W. 由 Fulton 在相交理论相关书籍[15]的定理 6.2 可直接得则有 $D_G^W(i_*(\alpha)) = i_*(D_G^W(\alpha))$. 因此有 $S_\bullet^W(i_*\alpha) = i_*(S_\bullet^W\alpha)$ 且 $S_\bullet(i_*\alpha) = i_*(S_\bullet\alpha)$.

引理 4.3：如果 $X \to U$ 和 $Y \to V$ 是 X 和 Y 到光滑簇的嵌入, 则

$$D^{U\times V}(\alpha \times \beta) = D^U\alpha \times D^V\beta.$$

证明：直接由 Fulton[15] 例 6.5.2 得到. ■

定理 4.2 (Cartan 公式)：若 $\alpha \in A_*X$ 且 $\beta \in A_*Y$, 则

$$S_\bullet^{U\times V}(\alpha \times \beta) = S_\bullet^U\alpha \times S_\bullet^V\beta,$$

$$S_\bullet(\alpha \times \beta) = S_\bullet\alpha \times S_\bullet\beta.$$

证明：第一个等式直接由引理直接得. 第二个等式是 w 的可乘性的结果:

$$w(T(U\times V)) = w(TU) \cup w(TV).$$ ■

将注记应用于 $X \to X \times X$ 嵌入映射中, 我们得到如下推论.

定理 4.3 (Cartan 公式)：对于光滑的 X, 有 $D^X(\alpha \cup \beta) = D^X(\alpha) \cup D^X(\beta)$, 以及 $S^\bullet(\alpha \cup \beta) = S^\bullet\alpha \cup S^\bullet\beta$.

命题 4.9：设 X 是包含在光滑空间 W 中的光滑空间, 其法丛为 $N = (TW|_X)/TX$. 设 $\alpha \in A^kX$, 则有:

（1）对任意群 $G \leqslant S(n)$, 有 $D_G^X[X] = [X]$.

（2）$S^\bullet[X] = [X]$.

（3）$S_\bullet^W[X] = [X] \cap \omega(N)$ 且 $S_\bullet[X] = [X] \cap \omega(TX)^{-1}$.

（4）$S^i\alpha = \begin{cases} \alpha^p, & i = k, \\ 0, & i > k. \end{cases}$

推论 4.1：对于嵌入 d 维光滑空间 W 的 X 及 $\alpha \in A_kX$ 而言, 当 $i \notin [0, d-k]$ 时, $S_i^W\alpha = 0$, 当 i=0 时, S_0^W 是恒等映射.

引理 4.4：设 V 是 X 上的秩为 r 的向量丛, 且 $\alpha \in A_*X$. 则

$$S_\bullet^W(\alpha \cap c_{\text{top}}(V)) = S_\bullet^W(\alpha) \cap c_{\text{top}}(V)w(V)$$

注释 4.8： 当 V 是线丛 L, 上式退化为:

$$S_{\bullet}^{W}(\alpha \cap c) = S_{\bullet}^{W}(\alpha) \cap (c + c^{p}).$$

对于一个环 $\alpha \in A_{*}X$, 记 $[\alpha]_{k}$ 为 k 次部分.

引理 4.5： 当 $n \neq 0$ 时, 有 $(S_{*}[\mathbf{P}^{n}])_{0} = 0$.

命题 4.10： 假设 $f : X \to Y$ 可以分解为闭嵌入 $g : X \to \mathbf{P}^{n} \times Y$ 再复合投影 $p_{2} : \mathbf{P}^{n} \times Y \to Y$. 则 $S_{\bullet}(f_{*}\alpha) = f_{*}(S_{\bullet}\alpha)$.

对于任何可以嵌入光滑概形的概形 X, 我们已定义了 $S_{\bullet}$. 特别地, 它对任何拟射影概形都有定义. 此外, 由于 $S_{\bullet}$ 是协变的. 为了将 $S_{\bullet}$ 的定义扩展到所有概形, 并证明该扩展对真态射是协变的, 可以使用一个[15] 中提到的周包络理论来进行论证.

首先回顾周包络理论（详细内容可以参考[15]. 若 X 是一个概形, 则 X 的一个**包络**是一个真态射 $p : X' \to X$, 使得对 X 的任意不可约子概形 V, 都存在 X' 的一个不可约子概形 V', 使得 p 把 V' 双有理地映到 V. 由此可得 $p_{*} : A_{*}X' \to A_{*}X$ 是满射. 如果 X' 是拟射影的, 那么我们就把这个包络 X' 被称为**周包络**. 根据 Fulton[15] 的引理 18.3, 对任意概形 X, 都存在一个周包络 $p : X' \to X$ 和一个闭子概形 Y, 使得 $X - Y$ 稠密, 并且 p 将 $X' - p^{-1}Y$ 同构地映到 $X - Y$.

假设 $p : X' \to X$ 是一个周包络, 且 $\alpha \in A_{k}X$ 是一个 cycle class. 由于我们可以找到使得 $p_{*}\alpha' = \alpha$ 的 $\alpha' \in A_{k}X'$, 所以自然会想到直接定义

$$S_{\bullet}\alpha := p_{*}S_{\bullet}\alpha'.$$

然而, 我们必须首先证明这个定义是良定的, 即它与 α' 及 X' 的选择无关. 按照 Fulton 的思路: 如果对任意 $\alpha' \in A_{*}X'$ 有

$$Sp_{*}\alpha' = p_{*}S_{\bullet}\alpha'.$$

那么我们说映射 $S : A_{*}X \to A_{*}X$ **与** p **是相容的**.

由于 $p : X' \to X$ 是包络, 所以至多存在一个与给定 p 相容的映射 S.

引理 4.6： 若 $S : A_{*}X \to A_{*}X$ 与一个周包络 p 相容, 则对任意真态射 $f : Y \to X$（其中 Y 是拟射影的）, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A_{*}Y & \xrightarrow{S_{\bullet}} & A_{*}Y \\ f_{*}\downarrow & & \downarrow f_{*} \\ A_{*}X & \xrightarrow{S} & A_{*}X \end{array}$$

特别地,S 与任意其他周包络都相容.

命题 4.11： 对于任意概形 X, 都存在一个 $S : A_{*}X \to A_{*}X$ 与所有周包络相容.

由此, 我们可以定义 $S_{\bullet} : A_{*}X \to A_{*}X$ 为与所有周包络相容的 S. 符合这样条

件的 S 也必然是唯一的. 由引理 10.1, 我们知道 $S_\bullet$ 与投射概形的真推出交换. 如果 $f: Y \to X$ 是任意真态射, 我们可以找到周包络 $q: Y' \to Y$ 和 $p: X' \to X$ 以及一个真映射 $f': Y' \to X'$ 使得 $pf' = fq$. 那么, 若 $\alpha \in A_kY$ 是一个类, 我们可以找到 $\alpha' \in A_kY'$ 使得 $q_*\alpha' = \alpha$. 那么有:

$$f_*S_\bullet\alpha = f_*S_\bullet q_*\alpha' = p_*f'_*S_\bullet\alpha' = S_\bullet p_*f'_*\alpha' = S_\bullet f_*\alpha.$$

因此我们得到以下事实.

命题 4.12：若 $f: Y \to X$ 是真态射, 则有 $f_*S_\bullet = S_\bullet f_*$.

命题 4.13：设 X 和 Y 是概形. 则有:

(i)对于任意 $\alpha, \beta \in A_kX$, 有 $S_\bullet(\alpha + \beta) = S_\bullet\alpha + S_\bullet\beta$.

(ii)对于任意 $\alpha \in A_kX$ 和 $\beta \in A_jY$, 有 $S_\bullet(\alpha \times \beta) = S_\bullet\alpha \times S_\bullet\beta$.

通过第二章, 我们知道在经典的拓扑情形下,Steenrod 幂运算与 Bockstein 运算 β 共同生成了 Steenrod 代数 $\mathcal{A}(p)$. 这个高度非交换的代数是由集合本身的元素商掉 Adem 关系生成的双边理想而得到的. 拓扑空间 X 的上同调 $H^*(X, \mathbf{F}_p)$ 是 Steenrod 代数 $\mathcal{A}(p)$ 上的模这一事实对代数拓扑有着深远的影响.

因为 Bockstein 运算 β 将拓扑次数增加 1, 所以并没有类似于 β 的运算存在作用于周理论上. 因此, 我们期望 $\mathcal{A}(p)$ 模去由 β 生成的双边理想可以在周群上作用.

对于有限的 W 和 $\alpha \in A^k[W, X]$, 我们有 $D^W(\alpha) = \eta^k S_W^\alpha \alpha(1/\eta)$. 我们通过定义 $D^\infty(\alpha) := \eta^k S_\infty^\alpha \alpha(1/\eta)$ 来推广该公式. 注意, 当 W 有限时 $D^W(\alpha) \in A_C^*[W, X]$, 而 $D^\infty(\alpha)$ 可能只落在局部化模 $A_C^*[W, X]_n$ 中.

定理 4.4：在 W 有限时,$s(D^2) = D^2$.

令 $m: R' \otimes R' \to R'$ 为乘法映射. 设 $R = R'_\eta$. 则 R 从 $A^*BC(p)$ 继承一个分次, 使得 η 的次数为 $p-1$. 将 D, m, s 扩展到 R 上. 那么, 由于 $D(\eta_1) = \eta_1(\eta_2 - \eta_1)^{p-1}$,$D$ 到 R 的扩展就在环 $(R \otimes R)_{\eta_2 - \eta_1}$ 上取值. 因此我们把 $\eta \otimes 1$ 记作 η_1, 把 $1 \otimes \eta$ 记作 η_2.）记 $M = A^*[W, X]$, $D^M = D^W$. 由 Cartan 公式我们知道 D^2 可由如下复合得:

$$M \xrightarrow{D^M} M \otimes R' \xrightarrow{D^M \otimes D} M \otimes R' \otimes R' \otimes R' \xrightarrow{1 \otimes s \otimes 1} M \otimes R' \otimes R' \otimes R' \xrightarrow{1 \otimes 1 \otimes m} M \otimes R' \otimes R'$$

然后我们就可以通过将 D 扩展到 R 而将此映射扩展为 $D^2: M \to (M \otimes R \otimes R)_{\eta_2 - \eta_1}$.

设 ι 是 R 上满足 $\eta \mapsto 1/\eta$ 的对合 (involution). M 是任意带有 $D^M: M \to M \otimes R$ 映射的分次 $\mathbf{F}_p$-模, 该映射将次数乘以 p. 记 $D^M(\alpha)(1/\eta) := (\mathrm{id} \otimes \iota) \circ D^M(\alpha)$. 定义 $S_M(\alpha) := \eta^k D^M(\alpha)(1/\eta)$, 并记 $S_M(\alpha) := \sum_i S_M^i(\alpha)\eta^i$. 对于 $\alpha \in M_k$, 这表明有 $D^M(\alpha) = \eta^k S_M(\alpha)(1/\eta)$. 如上式一样, 定义 $D^2: M \to M \otimes (R \otimes R)_{(\eta_2 - \eta_1)}$.

定理 4.5：设 M 如上, 假设

(i)对任意 α, 有 $S_M^i(\alpha) = 0$ 对 $i < 0$ 成立；

(ii)$s(D^2) = D^2$.

则 S_M^i 满足 Adem 关系. 即对 $0 < b < pc$,

$$S_M^b S_M^c = \sum_{i=0}^{[b/p]} (-1)^{b+i} \binom{(p-1)(c-i)-1}{b-pi} S_M^{b+c-i} S_M^i.$$

命题 4.14：如果对于任意有限 W, D^W 都上面定理的条件, 那么 D^∞ 也同样满足.

定理 4.6：设 $\mathcal{A}(p)$ 是素数 p 情况下的的 Steenrod 代数,β 是 Bockstein 运算. 那么 $\mathcal{A}(p)$ 模掉由 β 生成的双边理想作用在 $A^*[W,X]$ 上, 其中 W 要么是嵌入 X 的光滑代数空间, 要么 $W = \infty$.

至此, 我们介绍了周群上的 Steenrod 运算的构造及其运算性质. 接下来, 我们将进入具体问题中, 看到周群上的 Steenrod 运算如何在拓扑向量丛代数化问题上发挥作用.

第 5 章　应用: 拓扑向量丛代数化的阻碍

本章将分三个小节依次介绍拓扑向量丛代数化问题的问题背景、研究现状、4 维光滑仿射簇上秩 2 向量丛可代数化的充要条件以及具备代数陈类却不可代数化的例子的构造. 通过这一章, 我们可以看到周群上的 Steenrod 运算在拓扑向量丛代数化问题新进展中扮演的关键角色.

5.1　问题背景

如章节名所示, 我们要讨论的是拓扑向量丛代数化问题, 具体地说就是研究哪些拓扑向量丛可以提升为代数向量丛. 在解释什么叫做代数向量丛, 一般的代数向量丛与拓扑向量丛如何对应之前, 让我们先把视野拉回到 1949 年韦伊猜想刚被提出的时候. 如我们所知, 韦伊猜想处理的是定义在有限域上的射影代数簇上的 Zeta 函数. 这一猜想包含了很多内容, 或许与我们的主题最相关的是贝蒂数部分的内容. 它说明了有限域上的椭圆曲线与流形的贝蒂数的联系. 韦伊猜想推动了一股科学研究的浪潮, 最终促成了现代代数几何的建立. 韦伊也给出了一些代数几何世界存在着某种整系数的奇异上同调理论的有力证据. 最终在格罗滕迪克, 塞尔以及其他许多优秀数学家几十年工作后形成了许多我们熟知和喜爱的上同调理论, 如 ℓ-adic 上同调、motivic 上同调以及 crystalline 上同调.

1955 年, 塞尔发表了他的 FAC, 给出了向量丛与模的具体联系. 我们的主题——拓扑向量丛代数化问题其实就是在考虑模与向量丛的对应, 或者具体地说, 是复系数多项式环商环上的有限生成投射模与拓扑向量丛的对应.

我们知道复数域上的仿射代数簇对应了一个复系数多项式环的理想, 于是我们把定义在这一多项式环商环上的有限生成投射模叫做代数向量丛. 事实上, 如果用 $V_n(X)$, $V^{an}(X)$, $V^{top}(X)$ 分别表示秩 n 的代数向量丛, 解析向量丛与拓扑向量丛, 则有如下自然映射:

$$V_n(X) \to V^{an}(X) \to V^{top}(X)$$

其中能由代数向量丛打到的拓扑向量丛我们称之为可代数化的拓扑向量丛. 我们把从这一映射的象出发回到原象中的代数向量丛的过程称为拓扑向量丛的提升.

有了这个映射后, 自然地, 我们会问这样的问题: 这个从代数向量丛同构类打到拓扑向量丛同构类的映射是不是单射或者满射, 如果不是的话, 那么在何情况下

是, 能否给出单射或满射的等价描述？其中拓扑向量丛可代数化的最基础的必要条件是陈类 $c_i(\mathcal{E})$ 是代数的, 也就是说陈类是 cycle class map: $\mathrm{CH}^i(X) \to H^{2i}(X^{\mathrm{an}};\mathbb{Z})$ 的像. 与这一问题相关的是如何用拓扑向量丛刻画代数向量丛？过去 Schwarzenverger[25], Atiyah-Rees[10] 以及 Banica-Putinar[12] 的工作给了低维射影簇情况下很好的刻画.

上述映射是否单射是否满射这一问题的低维版本在上世纪七八十年代就已被解决:$\dim X \leqslant 3$ 时, 陈类是代数的等价于拓扑向量丛可以代数化[23][18]. 但四维及以上的高维版本始终是一个开放问题, 几十年来未能获得重大进展. 所以有数学家猜想: 或许在高维情况下, 仅凭陈类是代数的这一条件无法保证拓扑向量丛可以被代数化, 但始终未有人给出例子. 对于这一问题,Asok 等人在 2019 年发表于 Forum of Mathematics, Sigma 的文章[7] 首次给出否定答案, 并构造出了显式的超曲面的例子. 这也是本章所聚焦的核心. 事实上,Asok, Fasel, Hopkins 工作的成熟与众多相互关联的数学分支的蓬勃发展密切相关, 如 $\mathbb{A}^1$ -同伦论的发展[22], $\mathbb{A}^1$-同伦类与代数向量丛同构类的等价性被建立；Voevodsky 与 Brosnan 在周群上建立的 Steenrod 运算[32][13]. 整 Hodge 猜想的失效[30] 也为具备代数陈类却不可代数化的例子的构造提供了重要的几何基础.

5.2 障碍理论

这一节中, 我们将先介绍 $\mathbb{A}^1$ -同伦论相关基础, 再用它们给出四维二秩拓扑向量丛可代数化充要条件的具体证明.

5.2.1 陈类与基础的障碍理论

将 BGL_n 写作 GL_n 的分类空间[22]. 映射 $\mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ 诱导了分类空间的映射 $\mathrm{BGL}_n \to \mathrm{B}\mathbb{G}_m$. 若 $X \to \mathrm{BGL}_n$ 是一个表示光滑概形 X 上秩 n 向量丛的映射的同伦类, 则复合映射 $X \to \mathrm{BGL}_n \to \mathrm{B}\mathbb{G}_m$ 表示该向量丛的线丛.BGL_n 的一些 $\mathbb{A}^1$-同伦层也在 Morel[21] 中得到了计算.

引理 5.1：存在这样两个自然的同构 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{BGL}_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$ 和 $\pi_2^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{BGL}_2) \simeq \mathbf{K}_2^{\mathrm{MW}}$.

BGL_n 的 motivic 上同调是定义在一个点上的多项式代数, 带有 n 个双分次 $(2i,i)$ 参数 c_i（准确定义可参见 Pushin[24]）. 由 Voevodsky 的 motivic 上同调的（不稳定）$\mathbb{A}^1$-可表性[14] 可知, 每个 c_i 对应于一个映射的 $\mathbb{A}^1$-同伦类

$$c_i : \mathrm{BGL}_n \to K(\mathbb{Z}(i), 2i).$$

存在 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $\mathrm{Gr}_n \to \mathrm{BGL}_n$, 其中 Gr_n 是无穷 Grassmann 流形[22] . 因而我们可以固定一个合适的 BGL_n 和 $K(\mathbb{Z}(i), 2i)$ 的合适 $\mathbb{A}^1$-model 使得上述映射的 $\mathbb{A}^1$-同伦类由空间的态射 $\mathrm{Gr}_n \to K(\mathbb{Z}(i), 2i)$ 表示出来.

从 $\mathbb{A}^1$-同伦层的角度来看, 我们可以发现 $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ 并不是一个 Eilenberg–Mac Lane 空间. 然而, 我们可以用两种方式描述它的 $\mathbb{A}^1$-同伦层. 第一种描述由 motivic 上同调的 $\mathbb{A}^1$-可表性的给出. 第二种陈描述则由 Nesterenko–Suslin–Totaro 定理给出, 具体可参考 Mazza-Voevodsky-Weibel[19].

引理 5.2：有这样一个对 $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ 的 $\mathbb{A}^1$ 同伦群的上同调刻画: 存在典范同构 $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(K(\mathbb{Z}(n), 2n)) \simeq \mathcal{H}^{2n-i,n}$, 其中 $\mathcal{H}^{2n-i,n}$ 是预层 $U \mapsto H^{2n-i,n}(U, \mathbb{Z})$ 的层化. 特别地,$K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ 是 $\mathbb{A}^1$-$(n-1)$-连通的, 并且其首个非零的 $\mathbb{A}^1$-同伦层就是 $\mathbf{K}_n^{\mathrm{M}}$（第 n 个非分歧的 Milnor K-理论层）.

理想情况下, 我们可以通过对映射 $(c_1, c_2): \mathrm{BGL}_2 \to K(\mathbb{Z}(1), 2) \times K(\mathbb{Z}(2), 4)$ 的 Moore–Postnikov 分解导出的阻碍理论问题的研究出发, 来探究带有给定陈类 (c_1, c_2) 的秩 2 向量丛的存在性.”$K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ 不是 Eilenberg–Mac Lane 空间” 这一事实将给我们带来众多技术上的困难. 但是我们利用上述引理给出其同伦层的等价描述又能帮我们把这些困难问题简单化.

$K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ 的 $\mathbb{A}^1$-Postnikov 塔的第一层给出一个自然的从 $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ 到 $K(\mathbf{K}_n^{\mathrm{M}}, n)$ 的映射. 特别地, 将第 n 陈类与此映射复合, 就可以得到映射:

$$c_n': \mathrm{BGL}_r \to K(\mathbf{K}_n^{\mathrm{M}}, n).$$

5.2.2 主定理的证明——同伦层与 Moore–Postnikov 分解

考虑映射

$$(c_1', c_2'): \mathrm{BGL}_2 \to K(\mathbf{K}_1^{\mathrm{M}}, 1) \times K(\mathbf{K}_2^{\mathrm{M}}, 2),$$

其中 c_1' 和 c_2' 为 c_n' 所述映射. 我们的目标是分析此映射的同伦纤维. 记 F_2 为 (c_1', c_2') 的 $\mathbb{A}^1$-同伦纤维. 由引理 5.1 可知, 存在典范同构 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{BGL}_2) \simeq \mathbb{G}_m$, 且映射 c_1' 给出 $\mathbb{A}^1$-基本群层的同构. 因此, 我们可以考虑一个变体版本的阻碍理论问题, 并且考虑 $\mathbb{G}_m$ 在 $\mathbb{A}^1$-同伦纤维上的 $\mathbb{A}^1$-同伦层的作用. 我们首先可以确定 F_2 相关的 $\mathbb{A}^1$-同伦层以及 $\mathbb{G}_m$ 的作用（这一部分可以参考 Asok-Fasel[5]）.

命题 5.1：存在典范同构: $\pi_2^{\mathbb{A}^1}(F_2) \simeq \mathbf{I}^3$, $\pi_3^{\mathbb{A}^1}(F_2) \simeq \pi_3^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{BGL}_2) \simeq \pi_2^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{SL}_2)$.

定理 5.1：设 X 为特征不等于 2 的代数闭域上的 4 维光滑仿射簇, 固定 X 上的线丛 L, 其第一陈类为 $c_1 \in \mathrm{CH}^1(X)$. 给定第二陈类 $c_2 \in \mathrm{CH}^2(X)$, 则 (c_1, c_2) 是带 L 线丛的秩二拓扑向量丛的第一和第二陈类当且仅当 $\mathrm{Sq}^2 c_2 + c_1 \cup c_2 = 0$[7].

证明：这一定理的证明主要分四步:

第一步: 分析主阻碍. 由命题 5.1, 我们可以知道映射 $X \to \mathrm{BGL}_2$ 的提升 ψ 的主阻碍是 $H^3(X, \mathbf{I}^3(L))$ 中的一个等价类.

第二步: 分析次阻碍. 若主阻碍消失, 则我们可以选一个 (c_1, c_2') 的 Moore–Postnikov 分解的第二层的提升. 选定提升后, 得到次阻碍 $\eta \in H^4(X, \pi_3^{\mathbb{A}^1}(F_2)(L))$. 由命题 5.1, 这个阻碍是 $H^4(X, \pi_3^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{BGL}_2)(L))$ 的元素. 虽然看起来 η 依赖于提升的选择, 但我们可以声称 $H^4(X, \pi_3^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{BGL}_2)(L)) = 0$, 也就是说阻碍不依赖于提升的选取, 这一部分可以参考 Asok-Fasel[4].

第三步: 提升到 BGL_2 上去. 由于次阻碍消失, 可选择一个映射 Moore–Postnikov 分解的第三层的提升. 因 X 的 Nisnevich 上同调维数为四, 所以不会再有更高的提升了, 并且我们可以任意地选择 X 对映射 (c_1, c_2') 在 Moore–Postnikov 分解第四层的提升. 并且, 再次利用 X 的 Nisnevich 上同调维数为四这一事实, 可以知道在分解到第四层后, 所有的提升都是唯一确定的. 因此, 由与 Asok-Fasel[4] 相同的论证, 我们可以得到 $[X, \mathrm{BGL}_2]_{\mathbb{A}^1}$ 的一个元素. 综合之前步骤的讨论, 我们可以发现:$(c_1, c_2) \in \mathrm{CH}^1(X) \times \mathrm{CH}^2(X)$ 是 $[X, \mathrm{BGL}_2]_{\mathbb{A}^1}$ 的提升的的充要条件是 $\mathrm{Sq}^2 c_2 + c_1 \cup c_2 \in \mathrm{CH}^3(X)/2$ 等于零.

第四步: 几何化. 最后, 应用 Morel 的向量丛 $\mathbb{A}^1$-可表性定理 Asok-Hoyois-Wendt[6], 将 $[X, \mathrm{BGL}_2]_{\mathbb{A}^1}$ 等同到 $\mathcal{V}_2(X)$ 上去.

由此该定理证毕. ■

5.3　不可代数化拓扑向量丛的例子

上一节中, 我们给出了四维二秩拓扑向量丛可代数化的充要条件. 在这一节中, 我们将利用这一充要条件, 给出不可代数化的例子, 以此说明确实存在具备代数陈类却不可代数化的拓扑向量丛, 即在四维及以上条件下, 仅凭” 陈类是代数的” 无法保证拓扑向量丛可代数化.

如果 $\dim X < 3$, 则 $CH^3(X)$ 根据定义是平凡的；如果 $\dim X = 3$, 则 $CH^3(X)$ 是可除的；因此当 $\dim X \leqslant 3$ 时,$CH^3(X)/2$ 是平凡的. 所以, 能够支持我们所设想的非平凡例子的最小维数是四维.

命题 5.2：假设 Y 是一个维数 $\geqslant 4$ 的光滑射影簇,Z 是 Y 上的一个 ample 的超曲面（即 $\mathcal{O}_Y(Z)$ 是一个 ample 线丛）, 设 $X := Y \setminus Z$. 如果类映射 $CH^i(Y) \to H^{2i}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ 在 $i \leqslant 2$ 情况下是同构, 那么类映射 $CH^i(X) \to H^{2i}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ 在 $i \leqslant 2$ 时是单射[7].

取一个固定的同构 $CH^*(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3) \cong \mathbb{Z}[\xi, \mu]/\langle \xi^2, \mu^4 \rangle$（这里 ξ 和 μ 的次数为一）. 如果 Z 是一个 (d_1, d_2) 双分次的光滑超曲面, 那么在此同构下 $[Z] = d_1\xi + d_2\mu$. 我们现在在低次下计算 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ 中 Z 补集的周群.

命题 5.3：假设 $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ 是一个 (d_1, d_2) 双分次的超曲面, 满足 $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0$. 令 $g = \gcd(d_1, d_2)$ 并选取 m 和 n 使得 $md_1 + nd_2 = g$. 如果 $X := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \setminus Z$, 那么

$$CH^1(X) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}, \quad \text{且} \quad CH^2(X) \cong \mathbb{Z}/g\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(d_2^2/g)\mathbb{Z}.$$

在第一个同构下,$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}$ 由 ξ 的像生成, 而 $\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$ 由 μ 的像生成. 在第二个同构下, $\xi\mu$ 被映到 $(1, -md_2/g)$, 而 μ^2 被映到 $\mathbb{Z}/(d_2^2/g)\mathbb{Z}$ 的一个生成元. 如果 $d_1 \nmid d_2$ 且 $d_2 \nmid d_1$（例如 $\gcd(d_1, d_2) = 1$）, 那么可以假定 $\xi\mu$ 在 $CH^2(X)$ 上的限制是非平凡的[7].

证明：只需确定映射 $CH^{j-1}(Z) \to CH^j(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$. 由于 $i^* : CH^{j-1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3) \to CH^{j-1}(Z)$ 对 $j \leqslant 2$ 是同构, 那么我们只需计算映射 $i_*i^* : CH^{j-1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3) \to CH^j(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$ 的 cokernel.

根据定义,$[Z] \in CH^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$ 恰好是 $d_1\xi + d_2\mu$. 那么上面叙述的第一个同构即可由此得出:$CH^1(X) \cong \mathbb{Z}\xi \oplus \mathbb{Z}\mu/\langle d_1\xi + d_2\mu \rangle$. 对于第二个同构, 我们可由如下步骤得到:

考虑映射 i_*i^* 在 $CH^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$ 的基 ξ, μ 和 $CH^2(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$ 的基 $\xi\mu, \mu^2$ 下的矩阵表示. 这个矩阵不是对角矩阵, 但可以化成史密斯标准型.

特别地, 映射 i_*i^* 的 cokernel 可以从对角矩阵 $\mathrm{diag}(g, d_2^2/g)$ 的 cokernel 得出, 这正是命题所描述的结果. 而关于 $\xi\mu$ 和 μ^2 的像的部分可以直接由此推出. ■

定理 5.2：假设 $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ 是一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 $(3,4)$ 双分次的光滑复超曲面, 它在模掉某个素数 p （或者说定义在 $\mathbb{F}_p$ 上）的意义下可以化为奇异超曲面 $y_0^3x_0^4 + y_0^2y_1x_1^4 + y_0y_1^2x_2^4 + y_1^3x_3^4$. 类 $\xi\mu$ 和 $\xi\mu^2$ 从 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ 在 $X = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3) \setminus Z$ 上的限制都是非平凡的, 并且如果 ψ 是 $\xi\mu \in CH^2(X)$ 的像, 那么 $\mathrm{Sq}^2\psi \neq 0 \in CH^3(X)/2$[7].

证明：由 Cartan 公式[32]（注意到因为 $H^{3,1}(W, \mathbb{Z})$ 对任何光滑概形 W 都消失, 所以 $\mathrm{Sq}^1(\xi) = \mathrm{Sq}^1(\mu) = 0$,）, 在 $CH^*(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$ 中有 $\mathrm{Sq}^2(\xi\mu) = \xi\mu^2 + \xi^2\mu = \xi\mu^2$.

因为根据构造可以知道, 周群上的 Steenrod 运算与光滑概形间的态射的拉回相容, 所以 $\mathrm{Sq}^2(\psi)$ 是非平凡的实际上是因为 $\xi\mu$ 和 $\xi\mu^2$ 在 X 上的限制是非平凡的. 由于 $\gcd(3,4) = 1$,$\xi\mu$ 在 X 上的限制是非平凡的这一事实可以直接由命题 5.2 得出. 因此, 剩下需要证明 $\xi\mu^2$ 在 X 上的限制是非平凡的.

为此, 我们可以使用 Totaro 的一个想法, 他证明了 Z 中的每条曲线在 $\mathbb{P}^1$ 上的次数是偶数[30] . 通过这一陈述, 我们可以直接得到出 Z 上的 1-闭链 C 的 $i_*[C]$ 具有 $2r\xi\mu^2 + s\mu^3$ 的形式. 特别地,$\xi\mu^2$ 不在 i_* 的像中, 也不在模 2 周群相应的映射的像中, 因此它在 $CH^3(X)/2$ 上的限制是非平凡的.（注意: 最后这部分的观察又一次说明了 $\xi\mu$ 在 X 上的限制是非平凡的的事实, 因为它可以直接从上面:$\mathrm{Sq}^2(\psi)$（即 $\mathrm{Sq}^2(\xi\mu)$ 在 X 上的限制 $\xi\mu^2$）是非平凡的这一陈述得出.）■

推论 5.1：假设 X 是一个如定理 5.2 所描述的簇. 那么对于一个给定的 $c_2^{\mathrm{top}} \in H^4(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$, 存在唯一的一个在 X^{an} 上的拓扑向量丛 E^{an} 满足 $c_1^{\mathrm{top}}(E^{\mathrm{an}}) = 0$ 且 $c_2^{\mathrm{top}}(E^{\mathrm{an}}) = c_2^{\mathrm{top}}$. 如果 c_2^{top} 是 $\xi\mu$ 在类映射下的像, 那么带 $(0, c_2^{\mathrm{top}})$ 陈类的拓扑向量丛具有代数的陈类, 但却不是代数化的[7].

证明：如在定理 5.1 的证明中所讨论的, 映射 $(c_1^{\mathrm{top}}, c_2^{\mathrm{top}}) : \mathcal{V}_2^{\mathrm{top}}(X) \to H^2(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) \times H^4(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ 是保基点的双射. 因此, 一个陈类对 $(0, c_2^{\mathrm{top}})$ 决定了 X^{an} 上唯一的秩为二的拓扑向量丛. 在 c_2^{top} 是 $\xi\mu$ 在限制下的像的情形中, 由定理 5.2 可以直接得出 $\mathrm{Sq}^2(\xi\mu) \neq 0 \in CH^3(X)/2$. 因此, 这是前面定理的直接推论. ■

结 论

代数拓扑所具有的重要作用不仅体现在促进代数拓扑自身繁荣发展上, 更体现在其与其他数学分支的联动上, 如幂运算助力代数几何问题的解决以及高阶范畴语言越来越广泛地应用在各个领域问题及证明的描述上. 因此本文主要有介绍代数拓扑本身理论以及展示其跨分支的应用价值两个目的:

（1）本文完整地展示了经典上同调理论上的 Steenrod 运算、周群上的 Steenrod 运算以及拓扑 K 理论上幂运算的相关构造与性质, 不同章节相互呼应, 方便读者对照阅读, 加深理解；

（2）本文通过对具体例子的计算, 体现了上同调运算, 特别是幂运算与 Steenrod 运算在代数拓扑和代数几何中的应用价值. 本文在 2.2 节末尾通过具体例子的详细计算展现了 Steenrod 运算对拓扑空间精细结构的识别能力, 也在第五章展现了 Steenrod 运算这一代数拓扑工具在代数几何领域的拓扑向量丛代数化问题的推进上发挥的关键作用.

参考文献

[1] J. F. Adams. On the structure and applications of the Steenrod algebra. *Comment. Math. Helv.*, 32:180–214, 1958.

[2] J. F. Adams. Stable homotopy theory. In *Stable Homotopy Theory*, pages 22–37. Springer, 1964.

[3] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[4] A. Asok and J. Fasel. A cohomological classification of vector bundles on smooth affine threefolds. *Duke Math. J.*, 163(14):2561–2601, 2014.

[5] A. Asok and J. Fasel. Splitting vector bundles outside the stable range and homotopy theory of punctured affine spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(4):1031–1062, 2015.

[6] A. Asok, M. Hoyois, and M. Wendt. Affine representability results in $\mathbb{A}^1$-homotopy theory I: vector bundles. *Duke Math. J.*, 166(10):1923–1953, 2017.

[7] A. Asok, J. Fasel, and M. J. Hopkins. Obstructions to algebraizing topological vector bundles. *Forum Math. Sigma*, 7:e6, 2019. 18 pages.

[8] M. F. Atiyah. Power operations in K-theory. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Series (2)*, 17:165–193, 1966.

[9] M. F. Atiyah. *K-theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 2 edition, 1989. Notes by D. W. Anderson.

[10] M. F. Atiyah and E. Rees. Vector bundles on projective 3-space. *Invent. Math.*, 35:131–153, 1976.

[11] M. F. Atiyah and D. O. Tall. Group representations, λ-rings and the J-homomorphism. *Topology*, 8:253–297, 1969.

[12] C. Banică and M. Putinar. On complex vector bundles on projective threefolds. *Invent. Math.*, 88(2):427–438, 1987.

[13] P. Brosnan. Steenrod operations in Chow theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(5):1869–1903, 2003. electronic.

[14] P. Deligne. Voevodsky's lectures on motivic cohomology 2000/2001. In *Algebraic Topology*, volume 4 of *Abel Symp.*, pages 355–409. Springer, Berlin, 2009.

[15] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 1998.

[16] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. 2003. available online at http://www.math.cornell.edu/~hatcher.

[17] M. Karoubi. *K-theory: An Introduction*, volume 226 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978. ISBN 978-3-540-08090-3, 978-0-387-08090-5. ASIN (ebook/reprint): B0CYQDLX3N.

[18] N. M. Kumar and M. P. Murthy. Algebraic cycles and vector bundles over affine threefolds. *Ann. of Math.*, 116(3):579–591, 1982.

[19] C. Mazza, V. Voevodsky, and C. Weibel. *Lecture Notes on Motivic Cohomology*, volume 2 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[20] J. Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Ann. of Math.*, 67:150–171, 1958.

[21] F. Morel. *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field*, volume 2052 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2012.

[22] F. Morel and V. Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 90:45–143, 1999.

[23] M. P. Murthy and R. G. Swan. Vector bundles over affine surfaces. *Invent. Math.*, 36:125–165, 1976.

[24] O. Pushin. Higher Chern classes and Steenrod operations in motivic cohomology. *J. K-Theory*, 31(4):307–321, 2004.

[25] R. L. E. Schwarzenberger. Vector bundles on algebraic surfaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 11: 601–622, 1961.

[26] G. Segal. Equivariant K-theory. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, 34:129–151, 1968.

[27] N. E. Steenrod. Products of cocycles and extensions of mappings. *Ann. of Math.*, 48(2):290–320, 1947.

[28] N. E. Steenrod. *Cohomology Operations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962.

[29] B. Totaro. The Chow ring of a classifying space. In *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, volume 67 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 249–281, Providence, RI, 1999. American Mathematical Society.

[30] B. Totaro. On the integral Hodge and Tate conjectures over a number field. *Forum Math. Sigma*, 1:e4, 2013. 13 pp.

[31] V. Voevodsky. The Milnor conjecture. 1996. available online at https://api.semanticscholar.org/CorpusID:1191863.

[32] V. Voevodsky. Reduced power operations in motivic cohomology. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 98:1–57, 2003.

[33] C. T. C. Wall. Generators and relations for the Steenrod algebra. *Ann. of Math.*, 72(3):429–444, 1960.

[34] C. Wilkerson. λ-rings, binomial domains, and vector bundles over $\mathbb{C}P(\infty)$. *Communications in Algebra*, 10(3):311–328, 1982.

[35] 林金坤. *Adams 谱序列和球面稳定同伦群*. 科学出版社, 北京, 7 2007. ISBN 978-7-03-017642-4.

致　谢

感谢朱一飞老师对我的耐心指导. 感谢南科大教研序列和行政序列老师们的辛勤工作. 感谢一路上帮助过我的人们.

个人简历、在学期间完成的相关学术成果

个人简历

2000 年出生于山西.

2017 年 9 月考入南方科技大学,2021 年 6 月从南方科技大学数学系本科毕业并获得理学学士学位.

2024 年 9 月——2026 年 6 月, 在南方科技大学理学院数学系学习并攻读理学硕士学位.

获奖情况:2024-2025 年度南方科技大学优秀研究生干部、2024-2025 年度南方科技大学优秀学生骨干、2025-2026 年度南方科技大学优秀团干部.